# Die Nullklassengruppe algebraischer Funktionenkörper

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

U d o  T i e m e i e r
aus Ostichau

Saarbrücken 1968

# Die Nullklassengruppe algebraischer Funktionenkörper

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

U d o  T i e m e i e r
aus Ostichau

Saarbrücken 1968

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 22.3.1968

Der Dekan: Prof. Dr. H. Söhngen

Berichterstatter: Prof. Dr. E. Lamprecht
Prof. Dr. D. Puppe

## Inhaltsverzeichnis

Einleitung

§ 1 Divisoren und Nullklassengruppe ..... 1

§ 2 Idele und Idelklassen ..... 16

§ 3 Klassenkörper ..... 21

§ 4 Verzweigte Erweiterungen ..... 32

§ 5 Unverzweigte Erweiterungen und Klassenkörpertürme ..... 41

§ 6 Absolut algebraische Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik ..... 52

§ 7 Unverzweigte abelsche p-Erweiterungen ..... 59

§ 8 Dualitätssätze ..... 74

§ 9 Beispiele ..... 84

Literaturverzeichnis ..... 91

## Einleitung

Die Struktur der Nullklassengruppe *) algebraischer Funktionenkörper in einer Unbestimmten ist nur in wenigen Fällen bekannt: Ist der Konstantenkörper der Körper der komplexen Zahlen und besitzt der Funktionenkörper K das Geschlecht g, so ist die Nullklassengruppe zur 2g-dimensionalen Torusgruppe isomorph. Ist der Konstantenkörper endlich, so ist sie selbst endlich; ihre Ordnung ist die Klassenzahl von K.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, das Verhalten der Nullklassengruppe bei galoisschen Körpererweiterungen zu untersuchen, insbesondere wenn der Konstantenkörper endlich ist. Für diesen Spezialfall wird als wesentlichstes Ergebnis gezeigt, daß jede Primzahl, die die Klassenzahl des Funktionenkörpers K teilt, auch die Klassenzahl jedes endlich-galoisschen Erweiterungskörpers von K teilt ( Satz 8 ); insbesondere besitzt jeder Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper, dessen Klassenzahl durch eine Primzahl p teilbar ist, unverzweigte Erweiterungskörper von beliebig großem p-Potenzgrad, die denselben Konstantenkörper wie K besitzen und in unverzweigten galoisschen Erweiterungen von p-Potenzgrad über K liegen; dies ist ein wesentlicher Unterschied zum Fall endlich-algebraischer Zahlkörper.

Im ersten Paragraphen dieser Arbeit werden zunächst die grundlegenden Definitionen und einige bekannte

---

*), d.h. die Gruppe der Divisorenklassen vom Grade 0,

Ergebnisse zusammengestellt. Außerdem wird für Funktionenkörper mit beliebigem Konstantenkörper ein Satz ( Satz 1 ) über die Struktur der Nullklassengruppe bewiesen und das Verhalten dieser Gruppe bei verzweigten galoisschen Erweiterungen untersucht; hierbei gelangt man zu einem Analogon eines Satzes , der von A. Broumer und M. Rosen ( [4]) für endlich-algebraische Zahlkörper gewonnen wurde ( Satz 3 ).

In den Paragraphen 2 bis 5 werden Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper behandelt. Für diese gelten die Sätze der Klassenkörpertheorie. Mit Hilfe der Beziehung, die zwischen unverzweigten abelschen Erweiterungen, die denselben Konstantenkörper wie K besitzen, und den Untergruppen der Nullklassengruppe von K besteht, läßt sich hier das Verhalten der Nullklassengruppe bei galoisschen Erweiterungen weitgehend bestimmen ( Satz 4, 5, 7, 8 ). Außerdem wird die Existenz von abelschen Erweiterungen mit beliebig vielen Verzweigungen gezeigt ( Satz 6 ); dies ist wieder ein Analogon zur Theorie der endlich-algebraischen Zahlkörper ( Lamprecht [10]). Zum Abschluß dieses Abschnittes wird der Zusammenhang zwischen verschiedenen Klassenkörpertürmen von K, die aus unverzweigten Erweiterungen von p-Potenzgrad über K bestehen, und der Vereinigung aller unverzweigten galoisschen Erweiterungen von p-Potenzgrad von K ermittelt ( Satz 9 ).

Im dritten Teil ( § 6 - 8 ) werden die Strukturen der Nullklassengruppe und der unverzweigten abelschen Erweiterungen von p-Potenzgrad von K für den Fall, daß

der Konstantenkörper von K absolut algebraisch von Primzahlcharakteristik ist, untersucht. In einigen Fällen läßt sich hier eine Dualität zwischen unverzweigten abelschen Erweiterungen und Untergruppen der Nullklassengruppe zeigen ( Satz 14, 15 ).

Im letzten Paragraphen werden spezielle Beispiele behandelt; in einigen Fällen gestattet die entwickelte Theorie, die Nullklassengruppe von Funktionenkörpern genau zu bestimmen.

Mein besonderer Dank gilt meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. E. Lamprecht, für die Anregungen zu dieser Arbeit und die wohlwollende Förderung, die ich stets von ihm erfahren durfte.

## § 1 Divisoren und Nullklassengruppe

In diesem Paragraphen werden zunächst einige Begriffe der Theorie der algebraischen Funktionen zusammengestellt.

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper in einer Unbestimmten ( AF1 ) mit Konstantenkörper k; es wird stets vorausgesetzt, daß k in K algebraisch abgeschlossen ist.

Es sei v eine nicht-triviale, normierte, einrangig diskrete Bewertung von K über k *), also eine Abbildung von K in $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit den Eigenschaften

$v(x) = \infty$ genau dann, wenn $x = 0$ ;

$v(xy) = v(x) + v(y)$

$v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

$v(K) = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ( normiert, nicht-trivial )

$v(x) = 0$ für alle $x \in k$, $x \neq 0$ .

Es seien

$K^\times$ die Multiplikativgruppe von K;

$K_v$ die vollständige Hülle von K bezüglich v;

$U(K,v) = \{ a \in K_v^\times : v(a) = 0 \}$ die Einheitengruppe von $K_v$;

$\overline{K(v)}$ der Restklassenkörper von K und $K_v$ bezüglich v;

$d(v) = [\overline{K(v)} : k]$ der Grad von v;

M(K) die Menge aller nicht-trivialen, normierten, einrangig diskreten Bewertungen von K überk;

$K_S = \{a \in K^\times : v(a) = 0$ für alle $v \notin S\}$ ( $S \subset M(K)$ ) die S-Einheitengruppe von $K^\times$;

D(K) die freie abelsche Gruppe über M(K), die Divisorengruppe von K;

---

*) Da K ein AF1 über k ist, sind alle nicht-trivialen Bewertungen von K, die k trivial bewerten, einrangig diskret.

$\mathfrak{V}_K : K^\times \longrightarrow D(K)$, $\mathfrak{V}_K(a) = \prod_v v^{v(a)}$ die Divisorabbildung von K ;

$H(K) = \mathfrak{V}_K(K^\times)$ die Gruppe der Hauptdivisoren von K;

$\overline{D(K)} = D(K)/H(K)$ die Divisorenklassengruppe von K;

$d_K : D(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $d_K(\prod_v v^{n(v)}) = \sum_v n(v)d(v)$ die Divisorgradabbildung;

$D_o(K) = \mathrm{Kern}(d_K)$ die Gruppe der Divisoren vom Grade 0.

Da H(K) im Kern von $d_K$ liegt ([5],18), läßt sich $d_K$ durch $\overline{d_K}(\prod_v v^{n(v)} H(K)) = d_K(\prod_v v^{n(v)})$ zu einem Homomorphismus $\overline{d_K}$ von $\overline{D(K)}$ in $\mathbb{Z}$ fortsetzen. Der Kern dieser Abbildung ist

$$\overline{D_o(K)} = D_o(K)/H(K),$$

die Nullklassengruppe von K. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, die Struktur dieser Gruppe in speziellen Fällen zu untersuchen.

Beispiele : 1) Ist der Konstantenkörper k ein endlicher Körper, so ist die Nullklassengruppe eine endliche Gruppe ([7], 570).

2) Ist k der Körper der komplexen Zahlen und hat K das Geschlecht g, so ist die Nullklassengruppe isomorph zur 2g-dimensionalen Torusgruppe ([5],176) :

$$\overline{D_o(K)} \cong \prod_{1}^{g} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

Eine Aussage über die Struktur der Nullklassengruppe liefert folgender Satz:

Satz 1 : Ist K ein AF1 mit Konstantenkörper k, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Die Nullklassengruppe $\overline{D_o(K)}$ ist eine Torsionsgruppe.

(2) Ist $S \subset M(K)$ eine endliche, nicht-leere Menge, so existieren $a_1,..,a_{|S|-1} \in K_S^\times$ mit:

$$K_S^\times = k^\times \times \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_{|S|-1} \rangle \qquad *)$$

Beweis: Ist $S \subset M(K)$ eine endliche, nicht-leere Menge, so bezeichne $D(K)(S)$ die freie abelsche Gruppe über $S$; diese hat den Rang $|S|$. Es sei

$$D_0(K)(S) = D_0(K) \cap D(K)(S)$$
$$= \{ \prod_v v^{n(v)} \in D(K)(S) : \sum n(v)d(v) = 0 \} ;$$

$D_0(K)(S)$ ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang $|S|-1$. Es sei $H(K)(S) = D_0(K)(S) \cap H(K)$; wegen $\vartheta_K(K_S^\times) = H(K)(S)$ und $\mathrm{Kern}(\vartheta_K) = k^\times$ gilt:

$$H(K)(S) \cong K_S^\times / k$$

Aus (1) folgt (2):

Nach Voraussetzung ist $\overline{D_0(K)} = D_0(K)/H(K)$ eine Torsionsgruppe; dann ist auch

$$D_0(K)(S)/H(K)(S) = D_0(K)(S)/(D_0(K)(S) \cap H(K))$$
$$\cong (D_0(K)(S)H(K))/H(K)$$

eine Torsionsgruppe. Daher ist nach dem Elementarteilersatz $H(K)(S)$ wie $D_0(K)(S)$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang $|S|-1$. Es seien $x_1,..,x_{|S|-1}$ eine Basis von $H(K)(S)$ und $a_1,..,a_{|S|-1}$ Repräsentanten von $x_1,..,x_{|S|-1}$ in $K_S^\times$ bezüglich $\vartheta_K$. Da für jedes $a \in K_S^\times$ die Darstellung $\vartheta_K(a) = \prod_i x_i^{n_i}$ eindeutig bestimmt ist, besitzt a auch genau eine Darstellung $a = b \cdot \prod_i a_i^{n_i}$ mit $b \in k^\times$. Hieraus folgt:

$$K_S^\times = k^\times \times \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_{|S|-1} \rangle$$

Aus (2) folgt (1):

Nach Voraussetzung ist für jede endliche, nicht-leere Menge

---

*) $\langle a \rangle$ bezeichnet die von a erzeugte Untergruppe.

$S \subset M(K)$ $H(K)(S) \cong K_S^\times / k^\times$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang $|S|-1$. Da $D_0(K)(S)$ ebenfalls eine freie abelsche Gruppe vom Rang $|S|-1$ ist, ist $D_0(K)(S)/H(K)(S)$ nach dem Elementarteilersatz eine endliche Gruppe. $D_0(K)(S)/H(K)(S)$ ist zu $(D_0(K)(S)H(K))/H(K)$ isomorph. Da $D_0(K)/H(K)$ die Vereinigung der Untergruppen $(D_0(K)(S)H(K))/H(K)$ ist, wobei S die endlichen, nicht-leeren Teilmengen von M(K) durchläuft, ist $D_0(K)/H(K)$ eine Torsionsgruppe.

Beispiel: Ist der Konstantenkörper k von K ein algebraischer Erweiterungskörper eines endlichen Körpers, so ist die Nullklassengruppe von K eine Torsionsgruppe ( §6, Satz 10).

**Galoissche Erweiterungen:**

Es sei L ein endlich-galoisscher Erweiterungskörper von K mit Konstantenkörper l; es sei G die Galoisgruppe von L über K. l ist dann eine galoissche Erweiterung von k; die Einschränkung von G auf l liefert einen Epimorphismus von G auf die Galoisgruppe G' von l über k. Dieser Homomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn L eine Konstantenerweiterung von K ist, also $L = K(l)$ gilt. Die Erweiterung L von K wird geometrisch genannt, wenn L denselben Konstantenkörper wie K besitzt, also $l = k$ gilt.

Es sei $v \in M(K)$; es sei w eine Fortsetzung von v auf L ( Schreibweise $w|v$ ). Da L eine galoissche Erweiterung von K ist, sind der Verzweigungsindex

$$e(v) = ( w(L^\times) : w(K^\times) ) = ( \mathbb{Z} : w(K^\times) )$$

und der Restklassengrad

$$f(v) = [ \overline{L(w)} : \overline{K(v)} ]$$

unabhängig von der speziellen Wahl von w; außerdem gilt,

wenn r(v) die Anzahl der verschiedenen Fortsetzungen von v auf L bezeichnet:

$$e(v)f(v)r(v) = |G|$$

Es seien

$$N : D(L) \longrightarrow D(K),\ N(\prod_w w^{n(w)}) = \prod_v \prod_{w|v} v^{n(w)f(v)}$$

die Norm und

$$Con : D(K) \longrightarrow D(L),\ Con(\prod_v v^{n(v)}) = \prod_v \prod_{w|v} w^{n(v)e(v)}$$

die Conorm der Divisorengruppen. Diese Abbildungen sind mit der Divisorabbildung und der Norm von $L^\times$ in $K^\times$ bzw. der Einbettung von $K^\times$ in $L^\times$ verträglich; die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} L^\times & \xrightarrow{\vartheta_L} & D(L) \\ \downarrow N & & \downarrow N \\ K^\times & \xrightarrow{\vartheta_K} & D(K) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K^\times & \xrightarrow{\vartheta_K} & D(K) \\ \downarrow \cap & & \downarrow Con \\ L^\times & \xrightarrow{\vartheta_L} & D(L) \end{array}$$

sind kommutativ. Da bei Norm und Conorm Hauptdivisoren in Hauptdivisoren übergehen, lassen sich diese Abbildungen durch

$$N(\prod_w w^{n(w)}H(L)) = N(\prod_w w^{n(w)})H(K) \text{ und}$$
$$Con(\prod_v v^{n(v)}H(K)) = Con(\prod_v v^{n(v)})H(L)$$

zu Homomorphismen von Divisorenklassengruppen fortsetzen. Die zusammengesetzte Abbildung $N \circ Con : D(K) \longrightarrow D(K)$ hat die Form:

$$\begin{aligned} N \circ Con(\prod_v v^{n(v)}) &= N(\prod_w w^{n(v)e(v)}) \\ &= \prod_v \prod_{w|v} v^{n(v)e(v)f(v)} \\ &= \prod_v (v^{n(v)e(v)f(v)})^{r(v)} \\ &= (\prod_v v^{n(v)})^{|G|} \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die Abbildung $N \circ Con : \overline{D(K)} \longrightarrow \overline{D(K)}$:

1.1. $\quad N\,Con(\bar{u}) = \bar{u}^{|G|},\ \bar{u} \in \overline{D(K)}$

Die Verträglichkeit von Norm und Conorm mit der Divisorgradabbildung untersucht der folgende Hilfssatz:

**Lemma 1.1.** : a) $d_K(N(\prod_w w^{n(w)}) = [l : k]\, d_L(\prod_w w^{n(w)})$
für alle $\prod_w w^{n(w)} \in D(L)$.

b) $d_L(Con(\prod_v v^{n(v)}) = ([L : K]/[l : k])\, d_K(\prod_v v^{n(v)})$
für alle $\prod_v v^{n(v)} \in D(K)$.

**Beweis:** Aus

$$\begin{aligned} f(v)d(v) &= [\overline{L(w)} : \overline{K(v)}]\cdot[\overline{K(v)} : k] \\ &= [\overline{L(w)} : k] \\ &= [\overline{L(w)} : l]\cdot[l : k] \\ &= d(w)\cdot[l : k] \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} d_K(N(\prod_w w^{n(w)}) &= d_K(\prod_v v^{n(w)f(v)}) \\ &= \sum_w n(w)f(v)d(v) \\ &= \sum_w n(w)d(w)\cdot[l : k] \\ &= [l : k]\cdot d_L(\prod_w w^{n(w)}); \end{aligned}$$

dies ist die Behauptung von a). Hieraus ergibt sich b) :

$$\begin{aligned} d_L(Con(\prod_v v^{n(v)})) &= 1/[l : k]\cdot d_K(N\text{-}Con(\prod_v v^{n(v)})) \\ &= 1/[l : k]\, d_K((\prod_v v^{n(v)})^{[L : K]}) \\ &= ([L : K]/[l : k])\, d_K(\prod_v v^{n(v)}) \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die Gradabbildung der Divisorenklassengruppe:

1.2. $$\begin{aligned} \overline{d_K}(N(\prod_w w^{n(w)}H(L))) &= [l : k]\, \overline{d_L}(\prod_w w^{n(w)}H(L)) \\ \overline{d_L}(Con(\prod_v v^{n(v)}H(K))) &= ([L : K]/[l : k])\cdot \\ &\quad \cdot \overline{d_K}(\prod_v v^{n(v)}H(K)) \end{aligned}$$

Da Norm und Conorm Divisorenklassen vom Grade 0 in Divisorenklassen vom Grade 0 abbilden, werden sie im folgenden auch als Abbildungen von Nullklassengruppen aufgefaßt.

Jeder Automorphismus $g \in G$ induziert durch

$$g^*(w) = w\cdot g^{-1} \quad , \quad w \in M(L)$$

eine Bijektive Abbildung von M(L) auf sich; hierbei wer-

den die verschiedenen Fortsetzungen jeder Bewertung $v \in M(K)$ permutiert, und zu zwei Fortsetzungen w und w' einer Bewertung $v \in M(K)$ existiert $g \in G$ mit $g^*(w) = w'$ ([19], 65).
Die Automorphismen $g \in G$ lassen sich durch

$$g(\prod w^{n(w)}) = \prod g^*(w)^{n(w)}, \quad \prod w^{n(w)} \in D(L)$$

als Automorphismen von D(L) erklären; die derart definierte Operation von G auf D(L) ist mit der Operation auf $L^*$ und der Divisorabbildung verträglich; das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^* & \xrightarrow{\nu_L} & D(L) \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ L^* & \xrightarrow{\nu_L} & D(L) \end{array}$$

ist kommutativ. Da jedes $g \in G$ Hauptdivisoren in Hauptdivisoren abbildet, läßt sich die Operation von G auf die Divisorenklassengruppe durch

$$g(\prod w^{n(w)} H(L)) = g(\prod w^{n(w)}) H(L)$$

fortsetzen.
Die Operation von G auf D(L) und $\overline{D(L)}$ ist auch mit der Divisorgradabbildung von D(L) und der Gradabbildung von $\overline{D(L)}$ verträglich:

$$\begin{aligned} &d_L(g(\prod w^{n(w)})) = d_L(\prod w^{n(w)}), \quad \prod w^{n(w)} \in D(L) \\ &\overline{d_L}(g(\prod w^{n(w)} H(L))) = \overline{d_L}(\prod w^{n(w)} H(L)) \end{aligned} \tag{1.3.}$$

Beweis: Da w und $g^*(w)$ Fortsetzungen derselben Bewertung v von K sind, stimmen d(w) und $d(g^*(w))$ überein. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} d_L(g(\prod w^{n(w)})) &= \sum n(w) d(g^*(w)) \\ &= \sum n(w) d(w) \\ &= d_L(\prod w^{n(w)}) \end{aligned}$$

Dies ist der erste Teil der Behauptung; der zweite folgt unmittelbar aus dem ersten.

Als nächstes wird der Zusammenhang zwischen den Fixgruppen

$$D(L)^G = \{\prod w^{n(w)} \in D(L) : g(\prod w^{n(w)}) = \prod w^{n(w)} \text{ für alle } g \in G\}$$

und $H(L)^G$ mit den Gruppen $Con(D(K))$ und $Con(H(K))$ untersucht. Hierbei werden verschiedene Hilfsmittel aus der Cohomologietheorie verwendet; außerdem wird die cohomologische Form des Hilbertschen Satzes 90 :

$$H^1(G,L^\times) = 1 \qquad ([16], 158)$$

benutzt.

Lemma 1.2. : Es seien $v_1,..,v_r$ diejenigen Bewertungen von K, für die die Erweiterung L von K verzweigt ist.
a) $Con(D(K))$ ist eine Untergruppe von endlichem Index von $D(L)^G$; für die Faktorgruppe gilt:

$$D(L)^G/Con(D(K)) \cong \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/e(v_i)\mathbb{Z}$$

b) $Con(H(K))$ ist eine Untergruppe von endlichem Index von $H(L)^G$; die Ordnung von $H(L)^G/Con(H(K))$ ist ein Teiler von $[L : K]/[l : k]$.

Beweis: a) Es sei $u = \prod w^{n(w)} \in D(L)^G$. Sind w und w' Fortsetzungen derselben Bewertung v von K, so existiert $g \in G$ mit $g(w) = w'$; daher treten alle Fortsetzungen von v mit demselben Exponenten in u auf; u besitzt demnach die Darstellung: $u = \prod_v (\prod_{w|v} w)^{n(v)}$.
Umgekehrt liegt auch jeder derartige Divisor in $D(L)^G$, da die Fortsetzungen jeder Bewertung $v \in M(K)$ nur permutiert werden. $D(L)^G$ wird daher von den Divisoren der Form $\prod_{w|v} w$ erzeugt. $Con(D(K))$ wird von den Divisoren der Form $(\prod_{w|v} w)^{e(v)}$ erzeugt; $Con(D(K))$ ist daher eine Untergruppe von $D(L)^G$, und es gilt für die Faktorgruppe:

$$D(L)^G/Con(D(K)) \cong \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/e(v_1)\mathbb{Z}$$

b) Da Con(D(K)) eine Untergruppe von $D(L)^G$ ist, ist Con(H(K)) eine Untergruppe von $H(L)^G$.

$$1 \longrightarrow l^\times \longrightarrow L^\times \longrightarrow H(L) \longrightarrow 1$$

ist eine exakte Folge von G-Moduln; daher ist auch die Cohomologiesequenz

$$1 \longrightarrow l^{\times G} \longrightarrow L^{\times G} \longrightarrow H(L)^G \longrightarrow H^1(G,l^\times) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(G,L^\times)$$

exakt; wegen $l^{\times G} = k^\times$, $L^{\times G} = K^\times$ und $H^1(G,L^\times) = 1$ ist die Folge

$$1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow K^\times \longrightarrow H(L)^G \longrightarrow H^1(G,l^\times) \longrightarrow 1$$

exakt. Da außerdem auch die Folge

$$1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow K^\times \longrightarrow H(K) \longrightarrow 1$$

exakt ist, ergibt sich hieraus:

$$H(L)^G/Con(H(K)) \cong H^1(G,l^\times)$$

Es sei $H = \{ g \in G : g$ operiert trivial auf $l^\times \}$. H hat die Ordnung $[L : K] / [l : k]$; Da G/H die Galoisgruppe von l über k ist, ist $H^1(G/H,l^\times)$ trivial. Die Exaktheit der Folge

$$1 \longrightarrow H^1(G/H,l^\times) \longrightarrow H^1(G,l^\times) \longrightarrow H^1(H,l^\times)$$

( $l^{\times H} = l^\times$; [16], 125) zeigt jetzt, daß $H^1(G,l^\times)$ zu einer Untergruppe von $H^1(H,l^\times)$ isomorph ist. Da H auf $l^\times$ trivial operiert, ist $H^1(H,l^\times)$ zu $Hom(H,l^\times)$ isomorph. Ist E die Gruppe der $|H|$-ten Einheitswurzeln, die in $l^\times$ liegen, so gilt: $Hom(H,l^\times) \cong Hom(H,E)$

Die Ordnung von Hom(H,E) ist ein Teiler von $|H|$. Damit ist insgesamt gezeigt, daß die Ordnung von $H(L)^G/Con(H(K))$ ein Teiler von $|H| = [L : K] / [l : k]$ ist.

Aus dem Beweis ergibt sich unmittelbar eine Folgerung:

Corollar : Ist L eine geometrische, galoissche Erweiterung von K, so gilt, wenn E die Gruppe der $|G|$-ten Einheitswurzeln bezeichnet, die in L liegen:

$$H(L)^G/Con(H(K)) \cong Hom(G,E)$$

An späterer Stelle ( Satz 3 ) wird auch noch die Gruppe $\overline{D_o(L)}^G/Con(\overline{D_o(K)})$ untersucht; zunächst wird jedoch der Kern der Conorm der Nullklassengruppe betrachtet. Während die Conorm der Divisorengruppe monomorph ist, gilt in diesem Fall:

Satz 2 : Es sei K ein AF1 mit beliebigem Konstantenkörper. Ist L eine endlich-galoissche Erweiterung von K, so ist der Kern der Conorm der Nullklassengruppe eine endliche Gruppe, deren Ordnung $[L : K]/[1 : k]$ teilt.

Beweis: Der Kern von Con : $\overline{D_o(K)} \dashrightarrow \overline{D_o(L)}$ stimmt, da die Conorm nach 1.2. nur Divisorenklassen vom Grade 0 in Divisorenklassen vom Grade 0 abbildet, mit dem Kern von Con : $\overline{D(K)} \dashrightarrow \overline{D(L)}$ überein. Wegen $\overline{D(K)} = D(K)/H(K)$ und $\overline{D(L)} = D(L)/H(L)$ ist dieser zu $(Con(D(K)) \cap H(L))/Con(H(K))$ isomorph; dies ist eine Untergruppe von $H(L)^G/Con(H(K))$. Die Ordnung dieser Gruppe teilt, wie in Lemma 1.2. bewiesen wurde, $[L : K]/[1 : k]$ .

Aus diesem Beweis erhält man mit Hilfe des Corollars zu Lemma 1.2. eine Folgerung; es bezeichne E wieder die Gruppe der Einheitswurzeln der Ordnung $[L : K]$, die in L liegen, und G die Galoisgruppe von L über K.

Corollar 1 : Ist L eine geometrische, galoissche Erweiterung von K, so ist der Kern der Conorm der Nullklassengruppe zu einer Untergruppe von Hom(G,E) isomorph.

Aus Satz 2 folgt unmittelbar:

Corollar 2 : Ist L eine galoissche Konstantenerweiterung von K, so ist die Conorm der Nullklassengruppe monomorph.

Bemerkung: Corollar 2 ist ein bekanntes Ergebnis, das auch für separable, nicht-galoissche Konstantenerweiterungen gilt ([7], 477).

Zur Untersuchung von $\overline{D_o(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D_o(K)})$ wird der folgende Begriff verwendet:

1.4. Ist p eine Primzahl und A eine abelsche Gruppe, so ist $A(p) = \{ a \in A : a^p = 1 \}$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ; dessen Dimension heißt "p-Rang von A".

Satz 3 : Es sei K ein AF1 mit ( beliebigem ) Konstantenkörper k. Es sei L eine endlich-galoissche Erweiterung von K mit Konstantenkörper l; G sei die Galoisgruppe von L über K; $v_1,..,v_r \in M(K)$ seien diejenigen Bewertungen von K, für die die Erweiterung L über K verzweigt ist. Für eine Primzahl p sei $p^{s(p)}$ der p-Bestandteil von $[L : K]$, r(p) die Anzahl der $v_i$, deren Verzweigungsindex durch p teilbar ist, und R(p) der p-Rang von $\overline{D_o(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D_o(K)})$. Es sei C der Kern der Conorm der Nullklassengruppe. Dann gilt:

a) $\overline{D_o(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D_o(K)})$ enthält eine endliche Untergruppe U derart, daß $( [L : K]^2/( [l : k]^2 \cdot |C|))|U|$ von $\prod_{i=1}^{r} e(v_i)$ geteilt wird.

b) Für den p-Rang von $\overline{D_o(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D_o(K)})$ gilt:

$$R(p) \geq r(p) - s(p) - 1$$

Beweis: Zuerst wird die Behauptung auf eine Aussage über $\overline{D(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D(K)})$ zurückgeführt.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{D_0(K)} & \longrightarrow & \overline{D(K)} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{con} & & \downarrow \mathrm{con} & & \downarrow [L:K]/[l:k] & & \\ 1 & \longrightarrow & \overline{D_0(L)}^G & \longrightarrow & \overline{D(L)}^G & \longrightarrow & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

ist kommutativ und hat exakte Zeilen. Daher ist nach dem Kern-Cokern-Lemma *) auch die Folge

$$1 \longrightarrow \overline{D_0(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D_0(K)}) \longrightarrow \overline{D(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D(K)}) \longrightarrow \mathbb{Z}/[L:K]/[l:k]\mathbb{Z}$$

exakt.

Diese Sequenz zeigt folgendes:

Besitzt $\overline{D(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D(K)})$ eine Untergruppe, deren Ordnung durch eine Zahl m teilbar ist, so besitzt $\overline{D_0(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D_0(K)})$ eine Untergruppe, deren Ordnung durch $m[l:k]/[L:K]$ teilbar ist; außerdem gilt:

$$p\text{-Rang}(\overline{D(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D(K)})) \leq p\text{-Rang}(\overline{D_0(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D_0(K)})) + 1$$

---

*) Kern-Cokern-Lemma ( [12], 50): Es sei

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Moduln und Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen. Dann existiert ein Homomorphismus $D : \mathrm{Ker}(h) \longrightarrow \mathrm{Cok}(f)$, derart daß die Folge

$$\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{D} \mathrm{Cok}(f) \longrightarrow \mathrm{Cok}(g) \longrightarrow \mathrm{Cok}(h)$$

exakt ist (; hierbei sind $\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g)$ ,.. die von $A \longrightarrow B$ ,.. induzierten Abbildungen ).

Ist $A \longrightarrow B$ monomorph, so ist auch $\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g)$ monomorph; ist $B' \longrightarrow C'$ epimorph, so ist auch $\mathrm{Cok}(g) \longrightarrow \mathrm{Cok}(h)$ epimorph.

Es genügt daher, folgendes zu beweisen:

a') $\overline{D(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D(K)})$ enthält eine endliche Untergruppe $U'$ derart, daß $([L : K]/[l : k]|C|)|U'|$ von $\prod_i e(v_i)$ geteilt wird.

b') Für den p-Rang von $\overline{D(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D(K)})$ gilt:

$$p\text{-Rang}(\overline{D(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D(K)})) \geq r(p) - s(p)$$

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H(K) & \longrightarrow & D(K) & \xrightarrow{\rho} & \overline{D(K)} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \mathrm{Con} & & \downarrow \mathrm{Con} & & \downarrow \mathrm{Con} & & \\ 1 & \longrightarrow & H(L)^G & \longrightarrow & D(L)^G & \xrightarrow{\rho} & \overline{D(L)}^G & & \end{array}$$

ist kommutativ und hat exakte Zeilen; der Kern von $D(K) \longrightarrow D(L)^G$ ist trivial, der Kern von $\overline{D(K)} \longrightarrow \overline{D(L)}^G$ ist $C$. Nach dem Kern-Cokern-Lemma ist dann die Folge

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow H(L)^G/\mathrm{Con}(H(K)) \longrightarrow D(L)^G/\mathrm{Con}(D(K)) \longrightarrow \overline{D(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D(K)})$$

exakt. Es sei

$$U' = \rho(D(L)^G/\mathrm{Con}(D(K))) \subset \overline{D(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D(K)})$$

Für die Ordnung von $U'$ gilt dann:

$$|U'| = |D(L)^G/\mathrm{Con}(D(K))| \cdot |H(L)^G/\mathrm{Con}(H(K))|^{-1} \cdot |C|$$

Nach Lemma 1.2. hat $D(L)^G/\mathrm{Con}(D(K))$ die Ordnung $\prod_i e(v_i)$ und ist die Ordnung von $H(L)^G/\mathrm{Con}(H(K))$ ein Teiler von $[L : K]/[l : k]$. Hieraus ergibt sich die Behauptung a'.

Für den p-Rang von $U'$ gilt:

$$p\text{-Rang}(U') \geq p\text{-Rang}(D(L)^G/\mathrm{Con}(D(K))) - p\text{-Rang}(H(L)^G/\mathrm{Con}(H(K)))$$

Der p-Rang von $D(L)^G/\mathrm{Con}(D(K))$ ist $r(p)$; da die Ordnung von $H(L)^G/\mathrm{Con}(H(K))$ ein Teiler von $[L : K]/[l : k]$ ist, ist der p-Rang dieser Gruppe höchstens $s(p)$. Daher gilt:

$$p\text{-Rang}(U') \geq r(p) - s(p)$$

Der p-Rang einer Untergruppe kann nicht größer sein als der p-Rang der Gruppe selbst; daher ergibt sich hieraus die Behauptung b'.

Corollar: Ist die Nullklassengruppe von K endlich, so enthält $\overline{D_0(L)}^G$ eine Untergruppe V derart, daß $([L : K]/[l : k])^2 |V|$ von $|\overline{D_0(K)}| \prod e(v_i)$ geteilt wird.

Beweis: Es sei U gemäß Satz 3 gewählt; U hat die Form: $U = V/Con(\overline{D_0(K)})$, wobei V eine endliche Untergruppe von $\overline{D_0(L)}^G$ ist. Wegen $|Con(\overline{D_0(K)})| = |\overline{D_0(K)}|/|C|$ teilt $\prod e(v_i)$ jetzt $([L : K]/[l : k])^2(|V|/|\overline{D_0(K)}|)$. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung: Der obige Satz ist eine Übertragung eines Satzes für endlich-algebraische Zahlkörper, der von M. Rosen und A. Broumer bewiesen wurde ([4], 97).
Für den Spezialfall, daß K ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper ist, wurde der obige Satz bereits von M. Madan bewiesen ([11]); in diesem Fall wird nur vorausgesetzt, daß L über K separabel ist, jedoch nicht, daß L über K galoissch ist.

Zum Abschluß dieses Paragraphen werden Anwendungsbeispiele für Satz 3 behandelt.

Beispiele: Es sei k ein beliebiger Körper; es sei $K = k(x)$ der rationale Funktionenkörper in der Unbestimmten x über k. Es seien $f_1,..,f_r$ irreduzible Polynome aus dem Polynomring $k[x]$ und $v_1,..,v_r$ die entsprechenden Bewertungen von K.

a) es sei p eine Primzahl, die von der Charakteristik von K verschieden ist; außerdem enthalte k eine primitive p-te Einheitswurzel. Es sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $X^p - (f_1 \cdots f_r)$ über K. L ist dann eine abelsche Erweiterung vom Grade p von K, die (mindestens) für $v_1,..,v_r$ verzweigt ist.

b) Es sei $p>0$ die Charakteristik von k. Es sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $F = X^p - X - (f_1 \cdots f_r)^{-1}$ über K. L ist eine abelsche Erweiterung vom Grade p von K. Diese ist für $v_1,..,v_r$ verzweigt:
Ist w eine Fortsetzung von $v_1$ auf L und ist a eine Nullstelle von F, so gilt:

$$\begin{aligned} w(a^p - a) &= w((f_1 \cdots f_r)^{-1}) \\ &= - w(f_1) \\ &= - e(v_1) \end{aligned}$$

Wegen $w(a^p - a) \geq \min\{w(a^p), w(a)\} = \min\{pw(a), w(a)\}$ folgt hieraus: $w(a) < 0$ . Aus $w(a^p) = pw(a) < w(a)$ ergibt sich jetzt: $- e(v_1) = w(a^p - a) = w(a^p) = pw(a)$ . Dies zeigt, daß die Erweiterung L von K für $v_1$ verzweigt ist; entsprechendes gilt für $v_2,..,v_r$.

In beiden Fällen ist L eine abelsche Erweiterung vom Grade p von K, die für mindestens r Bewertungen von K verzweigt ist; der Verzweigungsindex ist stests p. Nach Satz 3 und dem Corollar gilt daher, wenn G wieder die Galoisgruppe von L über K bezeichnet:

1.6. $$\begin{array}{l} p\text{-Rang}(\overline{D_o(L)}^G) \geq r - 2 \quad \text{und} \\ p^r \text{ teilt } p^2 | \overline{D_o(L)}^G | \end{array} \qquad \left( \overline{D_o(K)} = 1 \right)$$

Da $k[x]$ unendlich viele irreduzible Polynome enthält, gibt es zu jeder natürlichen Zahl r unendlich viele abelsche Erweiterungen L vom Grade p von K, für die 1.6. gilt.

## § 2 Idele und Idelklassen

In diesem Paragraphen werden einige Eigenschaften von Idelgruppen und Idelklassengruppen zusammengestellt. Es gelten die Bezeichnungen von §1; es sei K jedoch jetzt ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper k.

Es seien

$$I(K) = \{(..,a_v,..) \in \prod_{v \in M(K)} K_v : v(a_v) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } v \in M(K)\}$$ die Idelgruppe von K;

$$U(K) = \{(..,a_v,..) \in \prod_{v \in M(K)} K_v : v(a_v) = 0 \text{ für alle } v\} = \prod_{v \in M(K)} U(K,v)$$ die Ideleinheitengruppe von K.

$K^*$ läßt sich durch

$$a \longrightarrow (..,a_v,..) \ , \ a_v = a \text{ für alle } v$$

in I(K) einbetten. Es sei

$C(K) = I(K)/K^*$ die Idelklassengruppe von K.

Topologie:

Für jedes $v \in M(K)$ ist die Einheitengruppe $U(K,v)$ von $K_v$ bezüglich der von v induzierten Topologie eine topologische Gruppe. Daher ist auch U(K), versehen mit der Produkttopologie, eine topologische Gruppe ([3], 31).

I(K) wird auf folgende Weise mit einer Topologie versehen: Es wird gefordert, daß I(K) eine topologische Gruppe ist, in der U(K) offen ist und die obige Topologie besitzt. Da in topologischen Gruppen die Topologie durch eine Umgebungsbasis der Eins eindeutig bestimmt ist, wird durch diese Forderungen eindeutig eine Topologie auf I(K) definiert.

Die Idelklassengruppe C(K) wird mit der Quotiententopologie versehen; C(K) ist dann ebenfalls eine topologische Gruppe.

Die topologischen Gruppen I(K) und C(K) besitzen eine Eigenschaft, die für die Klassenkörpertheorie wesentlich ist:

2.1. I(K) und C(K) sind lokalkompakte Gruppen.

Die Divisorabbildung von $K^\times$ läßt sich durch

$$\vartheta_K(..,a_v,..) = \prod_v v^{v(a_v)}$$

zu einer Divisorabbildung von I(K) erweitern. Diese Abbildung ist ein Epimorphismus mit Kern U(K). Daher gilt:

2.2. $D(K) \cong I(K)/U(K)$

Da $\vartheta_K$ $K^\times$ in H(K) abbildet, läßt sich $\vartheta_K$ durch

$$\overline{\vartheta_K}((..,a_v,..)K^\times) = \vartheta_K(..,a_v,..)H(K)$$

zu einem Epimorphismus $\overline{\vartheta_K}$ von C(K) auf $\overline{D(K)}$ fortsetzen. Der Kern dieser Abbildung ist $U(K)K^\times/K^\times$; daher gilt:

2.3. $$\overline{D(K)} \cong C(K)/(U(K)K^\times/K^\times) \cong I(K)/U(K)K^\times$$

Es seien

$V_K = d_K \circ \vartheta_K : I(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ , $V_K(..,a_v,..) = \sum_v v(a_v)d(v)$ die Betragsabbildung von I(K) und

$\overline{V_K} = \overline{d_K} \cdot \overline{\vartheta_K} : C(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ , die Betragsabbildung von C(K).

Sind $I_o(K)$ und $C_o(K)$ der Kern von $V_K$ bzw. von $\overline{V_K}$, so gilt entsprechend 2.2. und 2.3.:

2.4. $$D_o(K) \cong I_o(K)/U(K)$$
$$\overline{D_o(K)} \cong C_o(K)/(U(K)K^\times/K^\times) \cong I_o(K)/U(K)K^\times$$

Galoissche Erweiterungen:

Es sei L eine endlich-galoissche Erweiterung von K mit Konstantenkörper k; es sei G die Galoisgruppe von L über K.

Jeder Automorphismus $g \in G$ läßt sich durch

$$g(..,a_w,..) = (..,g(a_{g^*(w)}),..)$$

zu einem Automorphismus von I(L) fortsetzen; die Einschränkung dieser Operation auf $L^\times$ stimmt mit der üblichen überein. Wird I(K) durch

$$(..,a_v,..) \longrightarrow (..,a_w,..) \quad \text{mit } a_w = a_v \text{ für } w|v$$

in I(L) eingebettet, so ist, da zu je zwei Fortsetzungen w und w' einer Bewertung v von K ein Automorphismus $g \in G$ mit $g^*(w) = w'$ existiert, I(K) der Fixmodul von G; d.h. es gilt:

$$I(K) = I(L)^G$$

Durch

$$N(..,a_w,..) = \prod_{g \in G} g(..,a_w,..)$$

wird die Norm von I(L) definiert. Sie läßt sich wegen

$$N(I(L)) \frown I(L)^G = I(K)$$

auch als Homomorphismus von I(L) in I(K) auffassen. Ihre Einschränkung auf $L^\times$ stimmt mit der üblichen Norm überein.

Die Operation von G auf I(L), die Einbettung von I(K) in I(L) und die Norm von I(L) in I(K) sind mit den Divisorabbildungen und den entsprechenden Abbildungen der Divisorengruppe verträglich; die folgenden Diagramme sind kommutativ:

2.5.
$$\begin{array}{ccc} I(L) & \xrightarrow{\vartheta_L} & D(L) \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ I(L) & \xrightarrow{\vartheta_L} & D(L) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I(K) & \xrightarrow{\vartheta_K} & D(K) \\ \cap \downarrow & & \downarrow \iota_m \\ I(L) & \xrightarrow{\vartheta_L} & D(L) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I(L) & \xrightarrow{\vartheta_L} & D(L) \\ N \downarrow & & \downarrow N \\ I(K) & \xrightarrow{\vartheta_K} & D(K) \end{array}$$

Wegen $g(L^\times) = L^\times$ und $N(L^\times) \subset K^\times$ lassen sich die Automorphismen $g \in G$ zu Automorphismen von C(L) und die Norm N zu einem Homomorphismus von C(L) in C(K) fortsetzen; diese Abbildung wird ebenfalls mit N ( Norm ) bezeichnet.

Die Einbettung von I(K) in I(L) induziert einen Homomorphismus von C(K) in C(L). Diese Abbildung ist wegen

$$I(K) \cap L^{\times} = L^{\times G} = K^{\times}$$

monomorph. C(K) als Untergruppe von C(L) ist dann der Fixmodul von G:

2.6. $\quad C(K) = C(L)^{G}$

Beweis:

$$1 \longrightarrow L^{\times} \longrightarrow I(L) \longrightarrow C(L) \longrightarrow 1$$

ist eine exakte Folge von G-Moduln; die Cohomologiegruppe $H^1(G,L^{\times})$ ist nach dem Hilbertschen Satz 90 trivial; daher ist die Folge

$$1 \longrightarrow L^{\times G} \longrightarrow I(L)^{G} \longrightarrow C(L)^{G} \longrightarrow 1$$

exakt. Wegen $L^{\times G} = K^{\times}$ und $I(L)^{G} = I(K)$ folgt hieraus 2.6..

Die Operation von G auf C(L), die Einbettung von C(K) in C(L) und die Norm von C(L) in C(K) sind mit den Abbildungen $\overline{\jmath_L}$ und $\overline{\jmath_K}$ und den entsprechenden Abbildungen der Divisorenklassengruppen verträglich; die 2.5. entsprechenden Diagramme sind kommutativ.

Auf Grund dieser Verträglichkeiten ergeben sich aus Lemma 1.1. und den Formeln 1.2. und 1.3. für die Betragsabbildungen $V_K$ ( $= d_K \cdot \jmath_K$ ) und $\overline{V_K}$ ( $= \overline{d_K} \cdot \overline{\jmath_K}$ ) unmittelbar die folgenden Aussagen:

$$V_K(N(..,a_w,..)) = [l : k] \cdot V_L(..,a_w,..)$$

$$V_K(g(..,a_w,..)) = V_L(..,a_w,..) \quad , \; g \in G$$

für alle $(..,a_w,..) \in I(L)$

$$V_L(..,a_v,..) = ([L : K]/[l : k]) V_K(..,a_v,..)$$

für alle $(..,a_v,..) \in I(K)$

2.7.

$$\overline{V_K}(N((..,a_w,..)L^{\times})) = [l : k] \, \overline{V_L}((..,a_w,..)L^{\times})$$

$$\overline{V_L}(g((..,a_w,..)L^\times)) = \overline{V_L}((..,a_w,..)L^\times) \quad , \; g \in G$$
für alle $(..,a_w,..)L^\times \in C(L)$

$$\overline{V_L}((..,a_v,..)K^\times) = ([L : K]/[1 : k])\overline{V_K}((..,a_v,..)K^\times)$$
für alle $(..,a_v,..)K^\times \in C(K)$

Da die Automorphismen $g \in G$, die Norm und die Einbettung Idele und Idelklassen vom Betrage 0 in Idele und Idelklassen vom Betrage 0 abbilden, lassen sich diese Homomorphismen auch als Abbildungen von $I_o(L)$ in $I_o(L)$, von $I_o(L)$ in $I_o(K)$ und von $I_o(K)$ in $I_o(L)$ bzw. als Abbildungen von $C_o(L)$ in $C_o(L)$, von $C_o(L)$ in $C_o(K)$ und von $C_o(K)$ in $C_o(L)$ auffassen. Diese Homomorphismen sind dann auch mit den entsprechenden Abbildungen der Divisorengruppen 0-ten Grades und der Nullklassengruppen bezüglich der Divisorenabbildungen $\vartheta_K$ und $\vartheta_L$ und den Divisorenklassenabbildungen $\overline{\vartheta_K}$ und $\overline{\vartheta_L}$ verträglich; die 2.5. entsprechenden Diagramme sind kommutativ.

## § 3 Klassenkörper

Es sei K wieder ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper k; es gelten die früheren Voraussetzungen und Bezeichnungen.

Der Hauptsatz über Klassenkörper ist folgender

Satz : a) Ist A eine offene Untergruppe von endlichem Index von C(K), so existiert genau eine abelsche Erweiterung L von K mit $N(C(L)) = A$ ; außerdem ist die Galoisgruppe G von L über K zu C(K)/A isomorph.

b) Sind $A_1$ und $A_2$ zwei offene Untergruppen von endlichem Index von C(K), denen die abelschen Erweiterungskörper $L_1$ und $L_2$ von K entsprechen, so entspricht $A_1A_2$ der Erweiterungskörper $L_1 \cap L_2$ und $A_1 \cap A_2$ entspricht $L_1L_2$; insbesondere gilt $L_1 \subset L_2$ genau dann, wenn $A_1 \supset A_2$ gilt.

Beweis: [1], 70

Da es oft einfacher ist, mit Idelgruppen zu rechnen anstatt mit Idelklassengruppen, wird dieser Satz auch für Idelgruppen formuliert:

Corollar : a) Ist B eine offene Untergruppe von endlichem Index von I(K), die $K^\times$ enthält, so existiert genau eine abelsche Erweiterung L von K mit $N(I(L))K^\times = B$ ; außerdem ist die Galoisgruppe G von L über K zu I(K)/B isomorph.

b) Sind $B_1$ und $B_2$ zwei offene Untergruppen von endlichem Index von I(K), die $K^\times$ enthalten und denen die abelschen Erweiterungskörper $L_1$ und $L_2$ von K entsprechen, so entspricht $B_1B_2$ die Erweiterung $L_1 \cap L_2$ und $B_1 \cap B_2$ entspricht $L_1L_2$; insbesondere gilt $B_1 \subset B_2$ genau dann, wenn $L_1 \supset L_2$ gilt.

Beweis: Da I(K) eine topologische Gruppe ist und C(K) die Quotiententopologie bezüglich der Projektion

$$P : I(K) \dashrightarrow C(K)$$

besitzt, ist P eine offene, stetige Abbildung. P ist daher als Abbildung von

$$X = \{B \subset I(K) : B \text{ offene Untergruppe, } B \supset K^\times\}$$

in

$$Y = \{A \subset C(K) : A \text{ offene Untergruppe}\}$$

bijektiv. Außerdem gilt:

$$N(C(L)) = N(I(L))K^\times/K^\times$$

Jeder offenen Untergruppe B von endlichem Index von I(K), die $K^\times$ enthält, entspricht daher genau eine abelsche Erweiterung L von K mit $N(I(L))K^\times = B$. Wegen

$$C(K)/N(C(L)) = (I(K)/K^\times)/(N(I(L))K^\times/K^\times)$$
$$= I(K)/N(I(L))K^\times$$

gilt auch: $G = I(K)/B$.

Die Aussage b) folgt aus:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cap P(B_2);\ P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2)$$

für $B_1, B_2 \in X$.

Da der Konstantenkörper k von K endlich ist, enthält D(K) einen Divisor w vom Grade 1: $d_K(w) = 1$ ([1], 14). Daher existiert auch ein Idel $i \in I(K)$ vom Betrage 1: $V_K(i) = 1$ ; jedes Idel $i' \in I(K)$ läßt sich dann in der Form $i' = i^{v_K(i')} \cdot i_o$ mit $i_o \in I_o(K)$ darstellen, und diese Darstellung ist eindeutig bestimmt; es gilt daher:

3.1. $$I(K) = \langle i \rangle \times I_o(K) \qquad (V_K(i) = 1)$$
$$= \mathbb{Z} \times I_o(K)$$

Es sei L eine endlich-abelsche Erweiterung von K mit Konstantenkörper l; $B = N(I(L))K^\times$ sei die zugehörige Ideluntergruppe. Für den Index von $B_o = B \cap I_o(K)$ in $I_o(K)$ gilt dann:

Lemma 3.1. : $( I_o(K) : B_o ) = [L : K]/[l : k]$

Beweis: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & C_o(L) & \longrightarrow & C(L) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow N & & \downarrow N & & \downarrow [l : k] & & \\ 1 & \longrightarrow & C_o(K) & \longrightarrow & C(K) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ist kommutativ und hat exakte Zeilen; nach dem Kern-Cokern-Lemma ist dann auch

$$1 \longrightarrow C_o(K)/N(C_o(L)) \longrightarrow C(K)/N(C(L)) \longrightarrow \mathbb{Z}/[l : k]\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

exakt. Wegen $N(C_o(L)) = B_o/K^\times$, $N(C(L)) = B/K^\times$ und $(C(K)) : B ) = [L : K]$ ergibt sich hieraus:

$$( C_o(K) : B_o/K^\times ) = [L : K]/[l : k]$$

Dies zeigt die Behauptung.

Da der Körper k endlich ist, besitzt k zu jeder natürlichen Zahl n ( > 0 ) genau einen Erweiterungskörper vom Grade n; dieser ist über k galoissch, und seine Galoisgruppe über k ist die zyklische Gruppe der Ordnung n. Aus dem obigen Lemma folgt daher:

Corollar : Ist n ( > 0 ) eine natürliche Zahl und ist $i \in I(K)$ ein Idel vom Betrag n: $V_K(i) = n$ , so entspricht $\langle i \rangle \times I_o(K)$ die Konstantenerweiterung vom Grade n von K.

Ist L eine endlich-abelsche Erweiterung von K, so läßt sie sich i.a. nicht als Kompositum einer Konstantenerweiterung und einer geometrischen Erweiterung darstellen; es gilt jedoch:

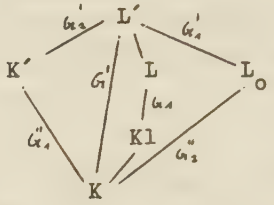
Lemma 3.2. : Es sei L eine abelsche Erweiterung vom Grade n von K mit Konstantenkörper l. Ist $L_o$ die Konstantenerweiterung vom Grade n von K und ist $L^* = LL_o$,

so enthält $L'$ einen Körper $K'$ mit: $K'L_0 = L'$, $K' \cap L_0 = K$; d.h. $L'$ ist das Kompositum der Konstantenerweiterung $L_0$ von $K$ und einer geometrischen ( abelschen ) Erweiterung $K'$ von $K$. Für die auftretenden Galoisgruppen gelten die folgenden Isomorphien:

$$G_1 \cong G_1' \cong G_1''$$

$$G_2' \cong G_2''$$

$$G' = G_1' \times G_2' \cong G_1'' \times G_2''$$




Beweis: Es sei $m = [l : k]$; es sei B die L entsprechende Ideluntergruppe. Nach früheren Überlegungen gilt dann:

$$V_K(B) = m\mathbb{Z}$$

Ist $b \in B$ mit $V_K(b) = m$, so läßt sich B darstellen in der Form: $B = \langle b \rangle \times B_0 \quad ( B_0 = B \cap I_0(K) )$

Es sei $i \in I(K)$ ein Idel vom Betrage 1: $V_K(i) = 1$ . Dann ist $\langle i^n \rangle \times I_0(K)$ die $L_0$ entsprechende Ideluntergruppe; zu $L' = LL_0$ gehört daher die Ideluntergruppe:

$$B' = B \cap \langle i^n \rangle \times I_0(K)$$
$$= \langle b \rangle \times B_0 \cap \langle i^n \rangle \times I_0(K)$$

$b$ besitzt die Darstellung: $b = i^m \cdot i_0$ mit $i_0 \in I_0(K)$; aus $( I_0(K) : B_0 ) = n/m$ folgt: $i_0^{n/m} = b_0 \in B_0$. Es gilt daher $b^{n/m} = i^n \cdot b_0 \in \langle i^n \rangle \times B_0$ und $i^n = b^{n/m} \cdot b_0 \in \langle b^{n/m} \rangle \times B_0$. Hieraus folgt jetzt:

$$3.2. \qquad \langle b^{n/m} \rangle \times B_0 = \langle i^n \rangle \times B_0$$

Für $B'$ ergibt sich hieraus:

$$B' = \langle b \rangle \times B_0 \cap \langle i^n \rangle \times I_0(K)$$
$$= \langle b^{n/m} \rangle \times B_0 \cap \langle i^n \rangle \times I_0(K)$$
$$= \langle i^n \rangle \times B_0 \cap \langle i^n \rangle \times I_0(K)$$
$$= \langle i^n \rangle \times B_0$$

Es sei $K'$ die zu $\langle i\rangle \times B_o$ gehörende abelsche Erweiterung von K; wegen

$$\langle i\rangle \times B_o \cap \langle i^n\rangle \times I_o(K) = \langle i^n\rangle \times B_o \quad ( = B' ) \text{ und}$$

$$\langle i\rangle \times B_o \cdot \langle i^n\rangle \times I_o(K) = I(K)$$

gilt dann: $K' \cdot L_o = L'$ und $K' \cap L_o = K$ .

Hieraus folgt für die Galoisgruppen: $G'' = G_1' \times G_2'$

$G_2'$ und $G_2''$ gehören beide zu Konstantenerweiterungen vom Grade n; sie sind daher beide zur zyklischen Gruppe der Ordnung n isomorph; daher gilt: $G_2' \cong G_2''$

$G_1'$ ist die Untergruppe derjenigen Automorphismen von $G'$, die auf l trivial operieren. Die Einschränkung dieser Automorphismen auf L und $K'$ liefert dann die Isomorphien $G_2' \cong G_2$ und $G_2' \cong G_2''$.

Damit ist Lemma 3.2. bewiesen.

Lemma 3.3. : Es sei $B_o$ eine offene Untergruppe vom Index n von $I_o(K)$, die $K^\times$ enthält. Dann existieren genau n verschiedene geometrische, abelsche Erweiterungen $L_i$ von K ( i = 1,..,n ) mit: $B_o = N(I_o(L_i))K^\times$

Ist $L_o$ die Konstantenerweiterung vom Grade n von K, so gilt:

$$L_oL_1 = L_oL_2 = \ldots = L_oL_n$$

Beweis: ( Nach [1], 79 )

Sind $c_1,..,c_n \in I_o(K)$ Repräsentanten für die verschiedenen Restklassen von $I_o(K)/B_o$ und ist $j \in I(K)$ ein Idel mit $V_K(j) = 1$ , so entspricht jeder der Gruppen

$$B_i = \langle jc_i\rangle \times B_o \qquad ( i = 1,..n )$$

eine geometrische, abelsche Erweiterung von K mit:

$$N(I_o(L_i))K^\times = B_o \qquad ( i = 1,..,n )$$

Die $L_i$ sind nach Konstruktion paarweise verschieden und weitere Körper mit den obigen Eigenschaften kann es nicht geben. Damit ist der erste Teil von Lemma 3.3. bewiesen.

Der Erweiterung $L_o$ entspricht die Ideluntergruppe $\langle j^n \rangle \times I_o(K)$. Nach 3.2. gilt (mit m = 1):

$$\langle jc_i \rangle \times B_o \cap \langle j^n \rangle \times I_o(K) = \langle j^n \rangle \times B_o$$

Die zu $L_o L_i$ gehörige Ideluntergruppe ist daher unabhängig von der Wahl von i; d.h. es gilt:

$$L_o L_1 = L_o L_i = \ldots = L_o L_n$$

Verzweigung:

Aus der Struktur der Ideluntergruppe B, die zu einer endlich-abelschen Erweiterung L von K gehört, lassen sich außer dem Grad der enthaltenen Konstantenerweiterung von K ( Lemma 3.1. ) auch die Verzweigungsindizes bestimmen:

Lemma 3.4. : Für alle $v \in M(K)$ gilt:

$$e(v) = ( U(K,v) : (U(K,v) \cap B) )$$

Beweis: L besitzt einen Unterkörper K', der über K für v unverzweigt ist, und über dem L den Grad e(v) hat, nämlich den Trägheitskörper von L bezüglich v ([19], 177). Da L genau dann für v unverzweigt ist, wenn B die Einheitengruppe U(K,v) enthält, gehört zu dem Trägheitskörper die Ideluntergruppe $B' = B \cdot U(K,v)$ . Die Behauptung ergibt sich jetzt aus:

$$\begin{aligned} e(v) &= [L : K'] \\ &= [L : K] / [K' : K] \\ &= ( I(K) : B ) / ( I(K) : B' ) \\ &= ( B' : B ) \\ &= ( B \cdot U(K,v) : B ) \\ &= ( U(K,v) : (U(K,v) \cap B) ) \end{aligned}$$

Enthält B die Gruppe $U(K)K^*$ , so ist die zugehörige

abelsche Erweiterung L von K unverzweigt. Ist umgekehrt L eine unverzweigte abelsche Erweiterung von K, so enthält B die Ideluntergruppe $U(K)K^\times$:
B enthält $K^\times$. Da der Index von B in I(K) endlich ist, ist auch der Index von $B \cap U(K)$ in U(K) endlich. Hieraus folgt, da B alle Einheitengruppen U(K,v) enthält:

$$U(K) = \prod_v U(K,v) \cap B$$

Die Faktorgruppen $I(K)/U(K)K^\times$ und $I(L)/U(L)L^\times$ sind zu den Divisorenklassengruppen $\overline{D(K)}$ und $\overline{D(L)}$ isomorph; diese Isomorphismen sind mit der Normabbildung verträglich ( §2 ). Daher gilt:

Lemma 3.5. : Ist $\bar{D}$ eine Untergruppe von endlichem Index von $\overline{D(K)}$, so existiert genau eine unverzweigte, abelsche Erweiterung L von K mit: $N(\overline{D(L)}) = \bar{D}$.
Die Galoisgruppe G von L über K ist zu $\overline{D(K)}/\bar{D}$ isomorph.
Ist l der Konstantenkörper von L, so gilt:

$$( \overline{D_0(K)} : (\overline{D_0(K)} \cap \bar{D}) ) = [L : K]/[l : k]$$

Die letzte Behauptung folgt aus Lemma 3.2. .

Es sei

$$h(K) = |\overline{D_0(K)}| = ( I_0(K) : U(K)K^\times )$$

die Klassenzahl von K; für eine Primzahl p sei $h_p(K)$ die p-Klassenzahl von K, d.h. der p-Bestandteil von h(K).
Die Nullklassengruppe $\overline{D_0(K)}$ besitzt genau eine Untergruppe $\overline{D_0(K)}'_p$ vom Index $h_p(K)$.
Es sei $\bar{u} \in \overline{D(K)}$ eine Divisorenklasse vom Grad 1, $\overline{d_K}(\bar{u}) = 1$.
Dann gehört gemäß Lemma 3.5. zu $\langle \bar{u} \rangle$ bzw. zu $\langle \bar{u} \rangle \times \overline{D_0(K)}'_p$ ein Erweiterungskörper $L_{\bar{u}}$ mit folgenden Eigenschaften:

3.3. a) $L_{\bar{u}}$ ist eine unverzweigte, geometrische, abelsche ( p- ) Erweiterung von K. *)

b) $L_{\bar{u}}$ ist bezüglich dieser Eigenschaften maximal; ist L eine Erweiterung von K mit den Eigenschaften von a) und enthält L den Körper $L_{\bar{u}}$, so stimmt L mit $L_{\bar{u}}$ überein.

Definition: Erweiterungskörper von K mit den Eigenschaften 3.3. werden "maximale unverzweigte, geometrische, abelsche ( p- ) Erweiterung von K" genannt.

Lemma 3.6. : Ist L eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche ( p- ) Erweiterung von K, so existiert $\bar{u} \in N(\overline{D(L)})$ mit $L = L_{\bar{u}}$.

Beweis: Es sei $\bar{u}' \in \overline{D(L)}$ eine Divisorenklasse vom Grade 1; da L eine geometrische Erweiterung von K ist, gilt nach 1.2. für $\bar{u} = N(\bar{u}') \in \overline{D(K)}$:

$$\overline{d_K}(\bar{u}) = \overline{d_K}(N(\bar{u}')) = \overline{d_L}(\bar{u}') = 1$$

$N(\overline{D(L)})$ hat dann die Form:

$$N(\overline{D(L)}) = \langle \bar{u} \rangle \times (\overline{D_o(K)} \cap N(\overline{D(L)}))$$

Da $\langle \bar{u} \rangle$ ( bzw. $\langle \bar{u} \rangle \times \overline{D_o(K)}'_p$ ) eine Untergruppe von $\langle \bar{u} \rangle \times (\overline{D_o(K)} \cap N(\overline{D(L)}))$ ist, enthält $L_{\bar{u}}$ den Körper L. Wegen der Maximalität von L folgt hieraus: $L = L_{\bar{u}}$

Es sei B(p) die ( eindeutig bestimmte ) Untergruppe vom Index $h_p(K)$ von $I_o(K)$, die $U(K)K^\times$ enthält. Dann gilt:

$$B(p)/U(K)K^\times \cong \overline{D_o(K)}'_p$$

Eine abelsche Erweiterung L von K ist genau dann eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche ( p- ) Erweiterung von K, wenn die zugehörige Ideluntergruppe

---

*) p-Erweiterung = Erweiterung von p-Potenzgrad

die Form:

$$\langle i \rangle \times U(K)K^{\times} \quad ( \text{ bzw. } \langle i \rangle \times B(p) )$$

hat, wobei $i \in I(K)$ ein beliebiges Idel vom Betrag 1 ist. Nach Lemma 3.3. existieren genau $h(K)$ ( bzw. $h_p(K)$ ) verschiedene geometrische, abelsche Erweiterungen L von K mit: $N(\overline{D_o(L)}) = U(K)K^{\times}$ ( bzw. $= B(p)$ )
Daher existieren genau $h(K)$ ( bzw. $h_p(K)$ ) verschiedene maximale unverzweigte, geometrische, abelsche ( p- ) Erweiterungen von K. Diese Erweiterungen unterscheiden sich jedoch nur um Konstantenerweiterungen:
Sind $L_1,..,L_{h(K)}$ ( bzw. $L_1,..,L_{h_p(K)}$ ) die verschiedenen maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen ( p- ) Erweiterungen von K und ist $L_o$ die Konstantenerweiterung vom Grade $h(K)$ ( bzw. $h_p(K)$ ) von K, so gilt auf Grund von Lemma 3.3.:

$$L_oL_1 = L_oL_2 = \ldots = L_oL_{h(K)}$$

$$( \text{bzw. } L_oL_1 = L_oL_2 = \ldots = L_oL_{h_p(K)} )$$

Definition: Ist L eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche ( p- ) Erweiterung von K und ist $L_o$ die Konstantenerweiterung vom Grade $h(K)$ ( bzw. $h_p(K)$ ) von K, so wird der ( durch K eindeutig bestimmte ) Kompositionskörper $LL_o$ "die maximale unverzweigte, abelsche ( p- ) Erweiterung von K" genannt.

Wegen $L \cap L_o = K$ gilt, wenn $G_o$ die Galoisgruppe von $LL_o$ über L und $G_1$ die Galoisgruppe von $LL_o$ über $L_o$ bezeichnen, füg die Galoisgruppe G von $LL_o$ über K:

$$G = G_o \times G_1$$

Außerdem ist $G_o$ zur Galoisgruppe von $L_o$ über K und $G_1$ zur Galoisgruppe von L über K isomorph.

Der Grad von $LL_o$ über K ist $h(K)^2$ ( bzw. $h_p(K)^2$ ).

Die maximalen unverzweigten, abelschen ( p- ) Erweiterungen besitzen eine für spätere Anwendungen sehr wesentliche Eigenschaft:

Lemma 3.7. : Ist K' eine endlich-galoissche Erweiterung von K und ist L die maximale unverzweigte, abelsche ( p- ) Erweiterung von K', so ist L auch eine galoissche Erweiterung von K.

Beweis: Es sei L' ein Erweiterungskörper von K' und g ein K-Isomorphismus von L auf L'. Da L über K separabel ist, genügt es, um die Behauptung zu beweisen, zu zeigen:

$$L = L' ;$$

also zu zeigen, daß alle über K zu L konjugierten Körper mit L übereinstimmen.

Die Einschränkung von g auf K' liefert einen Monomorphismus von K' in L'. Da K' über K galoissch ist, ist dies ein Automorphismus von K'; L' enthält daher K'.

Es sei H die Galoisgruppe von L über K'. Für jedes $h \in H$ ist dann $ghg^{-1}$ ein K'-Automorphismus von L'. Da L und L' über K konjugiert sind, gilt $[L : K] = [L' : K]$, also auch $[L : K'] = [L' : K']$. L' ist daher ebenfalls eine galoissche Erweiterung von K', und die Galoisgruppe von L' über K' ist zu H isomorph; insbesondere ist L' eine abelsche Erweiterung von K'.

g induziert durch $g^*(w) = w \cdot g^{-1}$ für $w \in M(L)$ ( vgl. §1 ) eine bijektive Abbildung der Menge M(L) der Bewertungen von L auf die Menge der Bewertungen M(L') von L'. Hierbei ändert sich das Verzweigungsverhalten nicht; d.h. es gilt für das Verzweigungsverhalten von w bzw. g (w) über K':

$$e(w) = e(g^*(w))$$

$L'$ ist daher eine unverzweigte Erweiterung von $K'$.
Es sei $K_1$ eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche ( p- ) Erweiterung von $K'$; $K_1$ liegt dann in L. Da $g$ und $g^{-1}$ Einheitswurzeln in Einheitswurzeln abbilden, besitzen $K_1$ und $g(K_1)$ ( $c\,L'$ ) denselben Konstantenkörper. Entsprechend haben auch L und $g(L) = L'$ denselben Konstantenkörper. Da $g(K_1)$ eine unverzweigte Erweiterung von $K'$ ist, denselben Konstantenkörper wie $K_1$ ( , also auch wie $K'$ ) besitzt und über $K'$ galoissch ist mit einer Galoisgruppe, die zur Galoisgruppe von $K_1$ über $K'$ isomorph ist, ist $g(K_1)$ ebenfalls eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche ( p- ) Erweiterung von $K'$.
$L'$ besitzt denselben Konstantenkörper wie L, enthält die maximale unverzweigte, geometrische, abelsche ( p- ) Erweiterung $g(K_1)$ von $K'$ und hat denselben Grad über $K'$ wie L; daher ist $L'$ das Kompositum des Konstantenkörpers $l_o$ von $L'$ ( und L ) mit $K_1$: $L' = K_1 l_o$
Dies zeigt, daß $L'$ mit L übereinstimmt.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wird noch eine Abschätzung für die Klassenzahl h(K) angegeben:

Lemma 3.8. : Ist K ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper k und hat K das Geschlecht $g$, so gilt für die Klassenzahl h(K) die folgende Abschätzung:

$$(|k|^{1/2} - 1)^{2g} \leq h(K) \leq (|k|^{1/2} + 1)^{2g}$$

Beweis: Aus der Theorie der Zetafunktion von K ergibt sich die Darstellung der Klassenzahl:

$$h(K) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - w_i) \qquad ([6],\ 318 - 320)$$

wobei die $w_i$ komplexe Zahlen sind, die alle den Betrag $|k|^{\frac{1}{2}}$ haben. Hieraus folgt die Behauptung.

## § 4 Verzweigte Erweiterungen

In diesem Paragraphen wird das Verhalten von Klassenzahl und Nullklassengruppe bei verzweigten Erweiterungen untersucht.

K bezeichne wieder einen AF1 mit endlichem Konstantenkörper k.

Zuerst wird eine Ungleichung bewiesen, die zum Beweis mehrerer Sätze verwendet wird:

Lemma 4.1. : Es sei L eine galoissche Erweiterung vom Primzahlgrad p von K; es seien $\overline{D_o(L)}_p$ und $\overline{D_o(K)}_p$ die p-Sylowgruppen der Nullklassengruppen von L und K; es sei r der p-Rang der Nullklassengruppe von K; es sei $C_p$ der Kern der Conorm Con : $\overline{D_o(K)}_p \longrightarrow \overline{D_o(L)}_p$. Dann gilt:

$$|\overline{D_o(L)}_p| \geq (p^r/|C_p|)\,|N(\overline{D_o(L)}_p)|$$

Beweis: Es sei $D_p$ der Kern der Norm N : $\overline{D_o(L)}_p \longrightarrow \overline{D_o(K)}_p$; aus

$$\overline{D_o(L)}_p/D_p \cong N(\overline{D_o(L)}_p)$$

folgt:

$$|\overline{D_o(L)}_p| = |N(\overline{D_o(L)}_p)|\,|D_p|$$

Es ist demnach noch $|D_p| \geq p^r/|C_p|$ zu zeigen.

$E = \{\bar{u} \in \overline{D_o(K)}_p : \bar{u}^p = 1\}$ ist eine Untergruppe der Ordnung $p^r$ von $\overline{D_o(K)}_p$. Wegen

$$N \cdot Con(\bar{x}) = \bar{x}^p \quad \text{für alle } \bar{x} \in \overline{D_o(K)} \qquad (1.1.)$$

liegt Con(E) in $D_p$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} |D_p| &\geq |Con(E)| \\ &\geq |E|/|C_p| \\ &= p^r/|C_p| \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Mit Hilfe dieser Abschätzung wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 4 : Ist L eine galoissche Erweiterung vom Primzahlgrad p von K, die für mindestens eine Bewertung von K verzweigt ist, und bezeichnet r den p-Rang der Nullklassengruppe von K, so gilt für die p-Klassenzahl von L:

$$h_p(L) \geq p^{r-1} \cdot h_p(K)$$

Enthält K keine primitive p-te Einheitswurzel, so gilt die Verschärfung:

$$h_p(L) \geq p^{r} \cdot h_p(K)$$

Beweis: Um Lemma 4.1. anwenden zu können, werden $|\overline{D_o(L)}_p|$, $|C_p|$ und $|N(\overline{D_o(L)}_p)|$ bestimmt.

Nach Definition gilt: $|\overline{D_o(L)}_p| = h_p(L)$

Es sei $B = N(I(L))K^\times$ die zu der Erweiterung L gehörende Ideluntergruppe von I(K). B ist eine Untergruppe vom Index p von I(K). Ist v eine Bewertung von K, für die L über K verzweigt ist, so enthält B die Einheitengruppe U(K,v) nicht ( Lemma 3.4. ); hieraus folgt:

$$B \cdot U(K,v) = I(K)$$

Dann gilt für $B_o = B \cap I_o(K)$ :

$$B_o \cdot U(K,v) = I_o(K)$$

Aus

$$\begin{aligned} N(I_o(L)/U(L)L^\times) &= (N(I_o(L))U(K)K^\times)/U(K)K^\times \\ &= B_o U(K)K^\times/U(K)K^\times \\ &= I_o(K)/U(K)K^\times \end{aligned}$$

und den Isomorphismen $\overline{D_o(L)} \cong I_o(L)/U(L)L^\times$ und $\overline{D_o(K)} \cong D_o(K)/U(K)K^\times$ ( 2.4. ) ergibt sich jetzt die Surjektivität der Norm $N : \overline{D_o(L)} \longrightarrow \overline{D_o(K)}$.

Hieraus folgt:

$$|N(\overline{D_o(L)}_p)| = |\overline{D_o(K)}_p|$$
$$= h_p(K)$$

Da L eine Erweiterung von Primzahlgrad ist, die für mindestens eine Bewertung von K verzweigt ist, ist L eine geometrische Erweiterung von K. Daher ist, wenn G die Galoisgruppe von L über K und E die Gruppe der Einheitswurzeln der Ordnung p, die in K liegen, bezeichnen, der Kern $C_p$ der Conorm zu einer Untergruppe von Hom(G,E) isomorph ( Cor. 1 zu Satz 2 ). Diese Gruppe ist die zyklische Gruppe der Ordnung p, falls K eine p-te Einheitswurzel ungleich 1 enthält, und die triviale Gruppe, falls K keine derartige Einheitswurzel enthält.

Aus Lemma 4.1. folgt jetzt:

$$h_p(L) = |\overline{D_o(L)}_p|$$
$$\geq (p^r/|C_p|)\,|N(\overline{D_o(L)}_p)|$$
$$= (p^r/p)\cdot h_p(K)$$
$$= p^{r-1}\cdot h_p(K)$$

und

$h_p(L) \geq p^r \cdot h_p(K)$ , falls K keine p-te Einheitswurzel ungleich 1 enthält.

Bei dem obigen Satz wird die Anzahl der Bewertungen von K, für die L über K verzweigt ist, nicht berücksichtigt; sie beeinflußt jedoch, wie der folgende Satz zeigt, die Größe der Klassenzahl von L:

Satz 5 : Es sei K ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper k. Es sei L eine endlich-galoissche Erweiterung von K mit Konstantenkörper l; G sei die Galoisgruppe von L über K:

$v_1,\dots,v_r \in M(K)$ seien diejenigen Bewertungen von K, für die die Erweiterung L über K verzweigt ist. Für eine Primzahl p sei $p^{s(p)}$ der p-Bestandteil von $[L : K]$, r(p) die Anzahl der $v_i$, deren Verzweigungsindex durch p teilbar ist, und R(p) der p-Rang von $\overline{D_o(L)}^G$. Dann gilt:

a) $\overline{D_o(L)}^G$ enthält eine Untergruppe U derart, daß $([L : K]^2/[1 : k])|U|$ von $|\overline{D_o(K)}|\prod_{i=1}^{r} e(v_i)$ geteilt wird.

b) Für den p-Rang von $\overline{D_o(L)}^G$ gilt:

$$R(p) \geq r(p) - s(p) - 1$$

Beweis: Wegen

$$p\text{-Rang}(\overline{D_o(L)}^G) \geq p\text{-Rang}(\overline{D_o(L)}^G/\mathrm{Con}(\overline{D_o(K)}))$$

sind diese Aussagen unmittelbare Folgerungen aus Satz 3 und dem zugehörigen Corollar.

Aus diesem Satz ergibt sich wegen

$|\overline{D_o(L)}^G|$ teilt h(L) und

$p\text{-Rang}(\overline{D_o(L)}^G) \leq p\text{-Rang}(\overline{D_o(L)})$ :

Corollar:

a) $h(K)\prod_{i=1}^{r} e(v_i)$ teilt $(|L : K|^2/|1 : k|)\cdot h(L)$.

b) $p\text{-Rang}(\overline{D_o(L)}) \geq r(p) - s(p) - 1$

Ein Anwendungsbeispiel für diesen Satz wird in §8 gegeben.

Im Zusammenhang mit diesem Satz taucht die Frage auf, ob es zu gegebenem Körper Erweiterungen mit beliebig vielen Verzweigungen gibt; diese Frage beantwortet:

Satz 6 : Ist K ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper und ist n eine natürliche Zahl, so existieren unendlich viele verschiedene galoissche Erweiterungen vom Prim-

zahlgrad p von K, die für mindestens n Bewertungen von K verzweigt sind.

Beweis:

1) Der Satz wird zuerst für rationale Funktionenkörper $K = k(x)$ bewiesen.

Für die beiden Fälle: p ist die Charakteristik von K und: K enthält eine primitive p-te Einheitswurzel, wurde die Behauptung schon früher ( bei beliebigem Konstantenkörper ) gezeigt ( §1 Ende ); man kann sich daher jetzt auf den Fall, daß p von der Charakteristik von K verschieden ist und K keine p-te Einheitswurzel ungleich 1 enthält, beschränken.

Für jede natürliche Zahl m ( $>0$ ) existiert eine galoissche Erweiterung $k_m$ vom Grade m über k; der Polynomring $k[x]$ enthält daher ein irreduzibles Polynom vom Grade m, nämlich das Minimalpolynom eines primitiven Elementes von $k_m$ über k.

Es sei f ein irreduzibles Polynom vom Grade $m(p-1)$ aus $k[x]$; zu f gehört eine Bewertung $v_f$ von $K = k(x)$. Für den Restklassenkörper dieser Bewertung gilt:

$$\overline{k(x)}(v_f) \cong k[x]/(f)$$

( (f) - von f erzeugtes Ideal in $k[x]$ )

Hieraus folgt:

$$|\overline{k(x)}(v_f)| = |k|^{\mathrm{Grad}(f)} = |k|^{m(p-1)}$$

Da p von der Charakteristik von k verschieden ist, teilt p die Ordnung von $\overline{k(x)}(v_f)^*$ : p teilt $(|k|^m)^{p-1} - 1$. Daher enthält $\overline{k(x)}(v_f)^*$ eine Untergruppe vom Index p.

Ist $U_1(K,v_f)$ die Einseinheitengruppe von $K_v^*$, der vollständigen Hülle von K bezüglich $v_f$, so ist die Faktorgruppe $U(K,v_f)/U_1(K,v_f)$ zu $\overline{K}(v_f)^* = \overline{k(x)}(v_f)^*$ isomorph. ([19], 19). $U(K,v_f)$ enthält daher eine Untergruppe $U(v_f)$

vom Index p, die $U_1(K,v_f)$ enthält. Da $U_1(K,v_f)$ in der topologischen Gruppe $U(K,v_f)$ offen ist, ist auch $U(v_f)$ als Obergruppe einer offenen Gruppe offen in $U(K,v_f)$.

m war beliebig gewählt; es ist damit gezeigt:

4.1. $K = k(x)$ besitzt unendlich viele Bewertungen v mit der Eigenschaft, daß $U(K,v)$ eine offene Untergruppe $U(v)$ vom Index p ( $\neq$ Charakteristik von K ) enthält.

Es seien $v_i$ derartige Bewertungen von K und $U(v_i)$ offene Untergruppen vom Index p von $U(K,v_i)$ ( $i = 1,..,n$ ).
$K = k(x)$ besitzt die Klassenzahl $h(K) = 1$; daher gilt:

$$J_o(K) = U(K)K^x$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
I_o(K)/(\prod_{i=1}^{n} U(v_i) \prod_{v\neq v_i} U(K,v)K^x) &= U(K)K^x/(\prod U(v_i) \prod_{v\neq v_i} U(K,v)K^x) \\
&= (\prod_{v_i} U(K,v_i) \prod_{v\neq v_i} U(K,v)K^x)/(\prod_{v_i} U(v_i) \prod_{v\neq v_i} U(K,v)K^x) \\
&\cong \prod_{i=1}^{n} U(K,v_i)/(\prod_{i=1}^{n} U(K,v_i) \wedge \prod_{i=1}^{n} U(v_i) \cdot \prod_{v\neq v_i} U(K,v)K^x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} U(K,v_i)/\prod_{i=1}^{n} U(v_i) \cdot \{\underbrace{\prod_{i=1}^{n} U(K,v_i) \wedge \prod_{v\neq v_i} U(K,v)K^x}_{= k^x \text{ ; als}}\}
\end{aligned}$$

Untergruppe von $\prod_{i=1}^{n} U(K,v_i)$, durch die Diagonalabbildung eingebettet.

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{n} U(K,v_i)/\prod_{i=1}^{n} U(v_i)k^x \\
&\cong (\prod_{i=1}^{n} U(K,v_i)/\prod_{i=1}^{n} U(v_i))/(\prod_{i=1}^{n} U(v_i)k^x/\prod_{i=1}^{n} U(v_i))
\end{aligned}$$

Die Gruppe $\prod_{i=1}^{n} U(K,v_i)/\prod_{i=1}^{n} U(v_i) \cong \prod_{i=1}^{n} (U(K,v_i)/U(v_i))$ ist eine elementar-abelsche p-Gruppe vom Rang n; die Untergruppe $\prod_{i=1}^{n} U(v_i)k^x/\prod_{i=1}^{n} U(v_i) \cong k^x/(k^x \wedge \prod_{i=1}^{n} U(v_i))$ ist trivial, da $k^x$ nach Voraussetzung keine p-te Einheitswurzel ungleich 1 enthält. Es gilt daher:

$$I_o(K)/(\prod_{i=1}^{n} U(v_i) \prod_{v\neq v_i} U(K,v)K^x) \cong \prod_{i=1}^{n} (U(K,v_i)/U(v_i))$$

Es sei $a_i$ ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe $U(K,v_i)/U(v_i)$. Die von den Elementen

$(a_1,a_2,1,..,1),(a_1,1,a_3,1,..,1),..,(a_1,1,..,1,a_n)$

erzeugte Untergruppe A von $\prod_{i=1}^{n} U(K,v_i)/U(v_i)$ hat den Index p; sie enthält keinen der Faktoren $U(K,v_i)/U(v_i)$. A entspricht daher bezüglich des obigen Isomorphismus eine Untergruppe $B_o$ von $I_o(K)$, die $\prod_{i=1}^{n} U(v_i) \prod_{\nu \neq \nu_i} U(K,v) K^{\times}$ enthält, mit folgenden Eigenschaften:

$$( I_o(K) : B_o ) = p;$$

$$B_o \cap U(K,v_i) = U(v_i), \text{ also:}$$

$$( U(K,v_i) : (U(K,v_i) \cap B_o) ) = p;$$

$B_o$ enthält $K^{\times}$;

außerdem ist $B_o$ offen, da $B_o$ die Gruppe $\prod_{i=1}^{n} U(v_i) \prod_{\nu \neq \nu_i} U(K,v)$ enthält, die nach Definition der Ideltopologie in I(K) offen ist.

Es sei $j \in I(K)$ ein Idel vom Betrag 1; dann entspricht $\langle j \rangle \times B_o$ eine abelsche Erweiterung vom Grade p von K. Diese ist wegen

$$\begin{aligned} &( U(K,v_i) : (U(K,v_i) \cap \langle j \rangle \times B_o) ) \\ &= ( U(K,v_i) : (U(K,v_i) \cap B_o) ) \\ &= p \end{aligned}$$

für alle $v_i$ verzweigt ( Lemma 3.4. ).

Da wegen 4.1. die $v_i$ auf unendlich viele verschiedene Arten gewählt werden können, existieren unendlich viele derartige Körper.

Für rationale Funktionenkörper K = k(x) ist Satz 6 damit bewiesen..

2) Der allgemeine Fall:

Es sei K jetzt ein beliebiger AF1 über k. Es sei $x \in K$ ein Element, das über k transzendent ist; für $K' = k(x)$

ist der Satz schon bewiesen. Es sei s die Anzahl derjenigen Bewertungen von K', für die die Erweiterung K von K' verzweigt ist. Es sei K'' eine abelsche Erweiterung vom Grade p von K', die für mindestens s+n+1 Bewertungen von K' verzweigt ist. K''K besitzt dann folgende Eigenschaften: K''K ist eine abelsche Erweiterung von K vom Grade

$$[K''K : K] \leq [K'' : K'] = p$$

K''K ist für mindestens n+1 Bewertungen von K über K verzweigt; die auftretenden Verzweigungsindizes sind durch p teilbar. Es gilt daher: $[K''K : K] = p$
Da K'' auf unendlich viele Arten gewählt werden kann, ergibt sich hieraus die Behauptung für den allgemeinen Fall.

Zusammen mit Satz 5 folgt aus Satz 6:

Corollar: Zu jeder natürlichen Zahl n existieren unendlich viele abelsche Erweiterungskörper L vom Grade p von K mit der Eigenschaft, daß der p-Rang der Nullklassengruppe von L mindestens gleich n ist:

$$p\text{-Rang}(\overline{D_0(L)}) \geq n$$

Bemerkung: Für endlich-algebraische Zahlkörper wurde von E. Lamprecht ([10]) ein ähnliches Ergebnis ermittelt: Es seien n eine natürliche Zahl und p eine Primzahl. Ist K ein endlich-algebraischer Zahlkörper der Klassenzahl h(K), so existiert eine natürliche Zahl $l = l(K,p)$, für die es unendlich viele verschiedene abelsche Erweiterungen L des Grades $[L : K] = p^l$ von K gibt, mit der Eigenschaft, daß der p-Rang der Klassengruppe von L mindestens gleich n ist. Wird h(K) von p nicht geteilt, so ist $l(K,p) = 1$.

Der Beweis jenes Satzes wird mit Hilfe von Konstruktionen durchgeführt, denen die Konstruktion im 1. Beweisschritt von Satz 6 nachgebildet wurde.

Der Beweis jenes Satzes von E. Lamprecht geht nicht auf den rationalen Zahlkörper zurück; dadurch kann die Zahl der Bewertungen von K, die bei der konstruierten Erweiterung L verzweigt sind, auch nach oben abgeschätzt werden. Ein derartiger Beweis kann auch für Funktionenkörper durchgeführt werden ([18]):

Es sei K ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper. Es gibt unendlich viele Bewertungen v von K derart, daß die Einheitengruppe U(K,v) eine offene Untergruppe vom Index p enthält ( auch im Falle p = Charakteristik von K ). Es sei S eine endliche Menge von Bewertungen von K mit der Eigenschaft: $\prod_{v \in S} K_v^{\times} \cdot \prod_{v \notin S} U(K,v) \cdot K^{\times} = I(K)$

Es sei T eine endliche Menge von Bewertungen von K mit:

a) $T \cap S = \emptyset$ b) $|T| \geq 2|S| + n + 3$

c) Für $v \in T$ enthält U(K,v) eine offene Untergruppe U(v) vom Index p.

Dann wird die Gruppe $I(K)/(\prod_{v \in S} K_v^{\times} \cdot \prod_{v \in T} U(v) \cdot \prod_{v \notin S,T} U(K,v) \cdot K^{\times})$ untersucht. Sie ist eine elementar-abelsche p-Gruppe, die eine Untergruppe vom Index p enthält, der sich eine abelsche Erweiterung vom Grade p von K zuordnen läßt, die für mindestens n+2 Bewertungen von K verzweigt ist.

Zusammen mit Satz 5 erhält man jetzt wieder das Corollar zu Satz 6.

Der hier angedeutete Beweis läßt sich auf endlich-algebraische Zahlkörper übertragen. Man erhält dann den von E. Lamprecht bewiesenen Satz mit der Verschärfung:

$\mathfrak{l}(K,p) = 1$ für alle K und p

## § 5 Unverzweigte Erweiterungen und Klassenkörpertürme

Es sei K wieder ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper k.
In diesem Paragraphen wird das Verhalten von Klassenzahl und Nullklassengruppe bei unverzweigten galoisschen Erweiterungen untersucht; außerdem werden verschiedene Arten von Klassenkörpertürmen behandelt.

Zunächst wird Satz 4 auf unverzweigte Erweiterungen übertragen:

Satz 7 : Ist L eine unverzweigte, abelsche Erweiterung vom Grade p von K und ist r der p-Rang der Nullklassengruppe von K, so gelten für die p-Klassenzahl von L die folgenden Abschätzungen:

$$h_p(L) \geq p^{r-2} \cdot h_p(K);$$

$$h_p(L) \geq p^{r-1} \cdot h_p(K),$$ falls K keine primitive p-te Einheitswurzel enthält, und

$$h_p(L) \geq p^{r} \cdot h_p(K)$$ , falls L eine Konstantenerweiterung von K ist.

Beweis: Dieser Satz wird wie Satz 4 mit Hilfe von Lemma 4.1. bewiesen.
Es seien $\overline{D_o(K)}_p$ und $\overline{D_o(L)}_p$ die p-Sylowgruppen der Nullklassengruppen von K und L.
Ist L eine Konstantenerweiterung von K, so ist der Kern der Conorm Con : $\overline{D_o(K)} \longrightarrow \overline{D_o(L)}$ trivial ( Cor. zu Satz 2 ), und die Norm N : $\overline{D_o(L)} \longrightarrow \overline{D_o(K)}$ ist epimorph ( Lemma 3.5. ); die Norm N : $\overline{D_o(L)}_p \longrightarrow \overline{D_o(K)}_p$ ist dann ebenfalls epimorph; es gilt also:

$$|N(D_o(L)_p)| = h_p(K)$$

Aus Lemma 4.1. folgt daher für diesen Fall:

$$h_p(L) = p^r \cdot h_p(K)$$

Ist L keine Konstantenerweiterung von K, so ist $N(\overline{D_o(L)})$ eine Untergruppe vom Index p von $\overline{D_o(K)}$ ( Lemma 3.5. ), also $N(\overline{D_o(L)}_p)$ eine Untergruppe vom Index p von $\overline{D_o(K)}_p$; es gilt daher:

$$|N(\overline{D_o(L)}_p)| = h_p(K)/p$$

Der Kern der Conorm Con : $\overline{D_o(K)}_p \dashrightarrow \overline{D_o(L)}_p$ ist eine Untergruppe der zyklischen Gruppe der Ordnung p; falls K keine primitive p-te Einheitswurzel enthält, ist er trivial (; dies wurde beim Beweis von Satz 4 gezeigt ). Nach Lemma 4.1. gelten dann die obigen Abschätzungen.

Corollar 1 : Ist L die Konstantenerweiterung vom Grade $p^n$ von K, so gilt:

$$h_p(L) \doteq p^n \cdot h_p(K), \text{ falls } h_p(K) \text{ ungleich 1 ist;}$$

$$h_p(L) = 1 \quad , \text{ falls } h_p(K) \text{ gleich 1 ist.}$$

Beweis: L ist über K galoissch; da die Galoisgruppe von L über K auflösbar ist, ergibt sich der erste Teil der Behauptung unmittelbar durch vollständige Induktion aus Satz 7.

Es gelte jetzt: $h_p(K) = 1$

Es sei L' die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von L ( Def. in 3.4. ); da L eine galoissche Erweiterung von K ist, ist L' nach Lemma 3.7. eine galoissche Erweiterung von K. Es sei G die Galoisgruppe von L' über K und H ( $c$ G ) die Galoisgruppe von L' über L; H ist direktes Produkt zweier Gruppen gleicher Ordnung ( §3 ). Ist H nicht trivial; d.h. gilt $h_p(L) \neq 1$, so ist H nicht zyklisch; dann ist G ebenfalls nicht zyklisch.

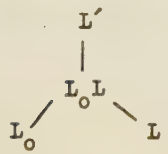
Da G eine p-Gruppe ist, ist auch die Faktorkommutatorgruppe $G' = G/[G,G]$ nicht zyklisch. $G'$ ist zur Galoisgruppe einer Erweiterung $K'$ ($\subset L'$) von K isomorph. $K'$ ist dann eine unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von K, jedoch keine Konstantenerweiterung, da $G'$ nicht zyklisch ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $h_p(K) = 1$. Damit ist die Behauptung $h_p(L) = 1$ bewiesen.

Corollar 2 : Ist L eine unverzweigte, galoissche p-Erweiterung von K und ist $h_p(K)$ ungleich 1, so ist auch die p-Klassenzahl $h_p(L)$ ungleich 1.

Beweis: Da die Galoisgruppe von L über K eine endliche p-Gruppe ist, läßt sich die Erweiterung L von K in eine Folge von zyklischen Erweiterungen vom Grade p zerlegen; es genügt daher, den Fall zu betrachten, daß L eine zyklische Erweiterung vom Grade p von K ist.
Da die Behauptung für Konstantenerweiterungen unmittelbar aus Satz 7 folgt, kann man sich beim Beweis auf geometrische Erweiterungen beschränken.
Es sei $L_o$ die Konstantenerweiterung vom Grade p von K; nach Corollar 1 gilt für ihre Klassenzahl:

$$h_p(L_o) \geq p \cdot h_p(K)$$
$$\geq p^2 \qquad (h_p(K) \neq 1 \text{ nach Voraussetzung})$$

$L_oL$ ist eine unverzweigte, abelsche Erweiterung vom Grade p von $L_o$; da $L_oL$ keine Konstantenerweiterung von $L_o$ ist, liegt $L_o$ in einer maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterung $L'$ von $L_o$. $L'$ ist eine unverzweigte abelsche Erweiterung vom Grade $h_p(L_o)/p$ ( $\geq p$ ) von $L_oL$, die denselben Konstantenkörper wie



$L_oL$ besitzt; d.h. es gilt:

$$h_p(L_oL) \geq p$$

Da $L_oL$ andererseits die Konstantenerweiterung vom Grade p von L ist, folgt nach Corollar 1 hieraus die Behauptung.

Als nächstes wird das Verhalten der p-Klassenzahl bei galoisschen Erweiterungen vom Grade n untersucht, wobei n zu p prim ist. Über das Verzweigungsverhalten der Erweiterung wird nichts vorausgesetzt.

Lemma 5.1.: Ist L eine galoissche Erweiterung vom Grade n von K, ist p eine Primzahl, die n nicht teilt, und ist $D_p$ der Kern der Norm $N : \overline{D_o(L)}_p \longrightarrow \overline{D_o(K)}_p$, so gilt:

$$\overline{D_o(L)}_p = \mathrm{Con}(\overline{D_o(K)}_p) \times D_p$$
$$\cong \overline{D_o(K)}_p \times D_p$$

Insbesondere gilt:

$$h_p(L) \geq h_p(K)$$

Beweis: Es ist zu zeigen:

$$\mathrm{Con}(\overline{D_o(K)}_p) \cap D_p = \{1\},$$
$$|\mathrm{Con}(\overline{D_o(K)}_p)| \cdot |D_p| = |\overline{D_o(L)}_p| \text{ und}$$
$$\overline{D_o(K)}_p \cong \mathrm{Con}(\overline{D_o(K)}_p).$$

Die zusammengestzte Abbildung

$$N \cdot \mathrm{Con} : \overline{D_o(K)}_p \longrightarrow \overline{D_o(K)}_p$$

bildet $\bar{u}$ in $\bar{u}^n$ ab ( 1.1. ); da n von p nicht geteilt wird, liefert sie einen Automorphismus von $\overline{D_o(K)}_p$. Hieraus folgt:

$$\mathrm{Con}(\overline{D_o(K)}_p) \cap D_p = \{1\}$$

Daher ist außerdem die Norm $N : \overline{D_o(L)}_p \longrightarrow \overline{D_o(K)}_p$ epimorph und die Conorm $\mathrm{Con} : D_o(L)_p \longrightarrow D_o(L)_p$ monomorph; dies ergibt die Isomorphien:

$$\overline{D_o(L)}_p / D_p \cong \overline{D_o(K)}_p$$

$$\overline{D_o(K)}_p \cong \mathrm{Con}(\overline{D_o(K)}_p)$$

Hieraus folgt:

$$|\overline{D_o(L)}_p| = |\overline{D_o(K)}_p| \cdot |D_p|$$

$$= |\mathrm{Con}(D_o(K)_p)| \, |D_p|$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse läßt sich jetzt einer der Hauptsätze dieser Arbeit beweisen:

Satz 8 : Es sei L eine ( endlich- ) galoissche Erweiterung von K; für eine Primzahl p sei die p-Klassenzahl $h_p(K)$ von K ungleich 1. Dann ist auch die p-Klassenzahl $h_p(L)$ von L ungleich 1.

Beweis: Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach dem Grad $[L : K]$ geführt.

Für $[L : K] = 1$ ist nichts zu zeigen.

Es sei jetzt $[L : K] > 1$.

Es seien G die Galoisgruppe von L über K und $G' = G/[G,G]$ die Faktorkommutatorgruppe von G. Ist $G' = \{1\}$, so ist nach dem Reziprozitätsgesetz ( $C(K)/N(C(L)) \cong G/[G,G]$ ) die Norm $N : C(L) \longrightarrow C(K)$ der Idelklassengruppen epimorph; nach Definition der Norm der Divisorenklassengruppen ist dann auch die Norm $N : \overline{D_o(L)} \longrightarrow \overline{D_o(K)}$ surjektiv. Daher wird in diesem Fall h(L) von h(K) geteilt.

Es sei jetzt $G' \neq \{1\}$; es sei p' eine Primzahl, die die Ordnung $|G'|$ teilt. Da die Gruppe G' abelsch ist, enthält sie eine Untergruppe vom Index p'; dieser entspricht ein Normalteiler vom Index p' von G, der $[G,G]$ enthält. Diesem wiederum entspricht nach der Galoistheorie eine zyklische

Erweiterung K' ( $\subset$ L ) vom Grade p' von K. Ist p' von p verschieden, so folgt aus Lemma 5.1.:

$$h_p(K') \geq h_p(K) \quad (> 1)$$

Ist p' gleich p, so gilt

$h_p(K') \geq h_p(K)$ ( $> 1$ ) nach Satz 4, falls K' über K verzweigt ist, und

$h_p(K') \neq 1$ nach Corollar 2 zu Satz 7, falls K' über K unverzweigt ist.

In jedem Fall gilt: $h_p(K') \neq 1$

Hieraus folgt wegen

$$[L : K'] = [L : K]/p' < [L : K]$$

die Behauptung.

Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar:

Corollar 1 : Ist die Klassenzahl h(K) ungleich 1, so ist auch die Klassenzahl h(L) ungleich 1.

Bemerkung: Dieses Corollar läßt sich im Falle $|k| \geq 5$ auch aus der Theorie der Zetafunktion gewinnen; hierbei darf L sogar eine beliebige endliche Erweiterung von K sein. Ist h(k) ungleich 1, so ist das Geschlecht von K ungleich 0; dann ist auch das Geschlecht von L ungleich 0. Ist l der Konstantenkörper von L und ist g das Geschlecht von L, so gilt nach Lemma 3.8.:

$$h(L) \geq (|l|^i - 1)^{2g} = (|k|^i - 1)^2 > 1$$

Es sei $K_o = L_o = K$;
es sei $K_i$ eine maximale, unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_{i-1}$ ( $i = 1,2,\ldots$ );

es sei $L_i$ die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von $L_{i-1}$ ( $i = 1,2,\ldots$ );
diese Körperketten bilden zwei Arten von p-Klassenkörpertürmen:

5.1. $K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \ldots \subset$

5.2. $K = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \ldots \subset$

Da maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterungen nicht eindeutig durch den Grundkörper bestimmt sind, ist auch der p-Klassenkörperturm 5.1. durch K nicht eindeutig festgelegt; es wird jedoch gezeigt ( Satz 9 ), daß jeder derartige Turm eng mit dem Turm 5.2. zusammenhängt.
Zunächst wird noch eine Folgerung aus Satz 8 gezogen; durch vollständige Induktion ergibt sich:

Corollar 2 : Ist die p-Klassenzahl $h_p(K)$ ungleich 1, so brechen die p-Klassenkörpertürme 5.1. und 5.2. nicht ab.

Die Struktur der p-Klassenkörpertürme 5.1. und 5.2. wird jetzt genauer untersucht.
Es seien: $\tilde{K} = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$

$\tilde{L} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$

Der endliche Körper k besitzt für jede natürliche Zahl m ( $>0$ ) genau eine Erweiterung vom Grade m; es sei $l_n$ die Erweiterung vom Grade $p^n$ von k;
es sei: $\tilde{l} = \bigcup_{n=0}^{\infty} l_n$

Es sei $\tilde{M}$ das Kompositum aller unverzweigten, ( endlich- ) galoisschen p-Erweiterungen von K.
$\tilde{M}$, $\tilde{L}$, $\tilde{K}$ und $\tilde{K}\tilde{L}$ sind Erweiterungskörper von K; für sie gilt:

Satz 9 :

a) Ist die p-Klassenzahl von K gleich 1, so gilt:

$$\tilde{L} = \tilde{K} = K \quad \text{und}$$

$$\tilde{M} = \tilde{K}\tilde{l}$$

b) Ist die p-Klassenzahl von K ungleich 1, so gilt:

$$\tilde{M} = \tilde{L} \neq \tilde{K}\tilde{l} \quad \text{( Unabhängig von der Wahl von } \tilde{K} \text{ )}$$

Beweis:

a) Im Falle $h_p(K) = 1$ gilt nach Definition der $L_n$ und $K_n$:

$$L_n = K_n = K \text{ für alle } n$$

Hieraus folgt: $\tilde{L} = \tilde{K} = K$

Für alle n liegt $Kl_n$ in M; daher gilt die Inklusion:

$$K\tilde{l} \subset \tilde{M}$$

Es sei $M \subset \tilde{M}$ eine unverzweigte, endlich-galoissche p-Erweiterung von K. Ist m der Konstantenkörper von M, so ist Km eine Konstantenerweiterung von p-Potenzgrad von K; daher hat Km wie K die p-Klassenzahl 1 ( Cor. 1 zu Satz 7 ). Ist G die Galoisgruppe von M über Km, so gehört gemäß der Galoistheorie zur Faktorkommutatorgruppe $G' = G/[G,G]$ eine abelsche Erweiterung $K'$ ( $\subset M$ ) von K; diese ist geometrisch und unverzweigt und hat p-Potenzgrad über Km. Da Km die p-Klassenzahl 1 hat, stimmt $K'$ mit Km überein; $G'$ ist daher trivial. Da G eine p-Gruppe ist, ist G ebenfalls trivial. Daher gilt: $M = Km \subset K\tilde{l}$ . Dies zeigt die Inklusion:

$$\tilde{M} \subset K\tilde{l}$$

b) Jetzt wird $h_p(K) > 1$ vorausgesetzt.

Folgende Inklusionen werden gezeigt:

$$\tilde{L} \subset \tilde{M}\,, \quad \tilde{K}\tilde{l} \subset \tilde{M}\,, \quad \tilde{M} \subset \tilde{L} \text{ und } \tilde{M} \subset \tilde{K}\tilde{l}$$

1) $\tilde{L} \subset \tilde{M}$

Es genügt zu zeigen, daß für alle n ( $\geq 0$ ) $L_n$ ein galoisscher Erweiterungskörper von K ist. Dies erfolgt durch vollständige Induktion nach n.

Für n = 0 ist die Behauptung trivial: $L_o = K$

Ist $L_{n-1}$ ( $n \geq 1$ ) galoissch über K, so ist nach Lemma 3.7., da $L_n$ die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von $L_{n-1}$ ist, $L_n$ ebenfalls galoissch über K.

2) $\tilde{K}\tilde{l} \subset \tilde{M}$

Für alle n liegt $Kl_n$ in $\tilde{M}$; daher gilt: $K\tilde{l} \subset \tilde{M}$ . Es genügt daher zu zeigen, daß $K_n$ für alle n in $\tilde{M}$ liegt. Dies wird durch vollständige Induktion bewiesen.

Für n = 0 ist wegen $K_o = K$ nichts zu zeigen.

$K_{n-1}$ ( $n \geq 1$ ) möge in M liegen; es existiert also eine unverzweigte, galoissche p-Erweiterung $M \subset \tilde{M}$ von K, die $K_{n-1}$ enthält.

$K_n$ ist eine unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von $K_{n-1}$; daher ist $K_nM$ eine unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von M. Es sei $L'$ die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von M; $L'K_n$ ist dann eine unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von M. Da $L'$ die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von M ist, ist $L'K_n$ eine Konstantenerweiterung von $L'$; ist $l'$ der Konstantenkörper von $L'K_n$, so gilt: $L'K_n = L'l$

M ist über K galoissch; daher ist nach Lemma 3.6. auch die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung $L'$ von M über K galoissch; $L'l = L'K_n$ ist dann ebenfalls über K galoissch; da $L'K_n$ eine unverzweigte, galoissche p-Erweiterung von K ist, $L'K_n$ also in $\tilde{M}$ enthalten ist, liegt $K_n$ in $\tilde{M}$.

3) Die Inklusionen $\tilde{M} \subset \tilde{K}\tilde{1}$ und $\tilde{M} \subset \tilde{L}$ werden gleichzeitig bewiesen.

Es sei $M \subset \tilde{M}$ eine unverzweigte, ( endlich- ) galoissche p-Erweiterung von K; m sei der Konstantenkörper von M.

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach

$$d(M,K) = [M : K]/[m : k]$$

geführt.

Ist $d(M,K) = 1$, so ist M eine Konstantenerweiterung von K; daher gilt: $M = Km \subset K\tilde{1} \subset \tilde{K}\tilde{1}$

Da der p-Klassenkörperturm 5.2. nicht abbricht ( $h_p(K) > 1$ ), ist $\tilde{L}$ keine endliche Erweiterung von K; $\tilde{L}$ enthält daher den Körper $\tilde{1}$, und es gilt: $M = Km \subset K\tilde{1} \subset \tilde{L}$

Es sei jetzt $d(M,K) > 1$.

Es seien G die Galoisgruppe von M über K und G' die Faktorkommutatorgruppe von G. Die beiden Fälle: G' ist zyklisch bzw. nicht zyklisch, werden getrennt behandelt.

Ist G' zyklisch, so ist auch G zyklisch. $MK_1$ und $ML_1$ sind dann unverzweigte, abelsche p-Erweiterungen von K; $MK_1$ und $ML_1$ sind daher Konstantenerweiterungen von $K_1$ bzw. $L_1$.

Hieraus folgt: $M \subset MK_1 \subset K_1\tilde{1} \subset K\tilde{1}$ und $M \subset ML_1 \subset L_1\tilde{1} \subset \tilde{L}$.

G' sei jetzt nicht zyklisch. G' ist zur Galoisgruppe der größten abelschen Erweiterung von K, die in M enthalten ist, isomorph; dies sei M'. M' enthält den Konstantenkörper m von M; M' ist jedoch, da G' nicht zyklisch ist, keine Konstantenerweiterung von K.

Da G' abelsch ist, sind $M'K_1$ und $M'L_1$ abelsche p-Erweiterungen von K; außerdem sind sie über K unverzweigt. Deshalb sind $M'K_1$ und $M'L_1$ Konstantenerweiterungen von $K_1$ bzw. $L_1$.

Ist 1 der Konstantenkörper von $M'K_1$, so gilt: $M'K_1 = K_1 1$

Da M' keine Konstantenerweiterung von K ist, gilt:

$$[K_1 1 : M'] < [K_1 : K]$$

Hieraus folgt, wenn $1'$ den Konstantenkörper von $MK_1$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}[MK_1 : M1'] &\leq [MK_1 : M1] \\ &\leq [MM'K_1 : MM'1] \\ &\leq [M'K_1 : M'1] \\ &= [K_1 1 : M'1] \\ &< [K_1 : K]\end{aligned}$$

$d(\ ,\ )$ ist gegenüber Konstantenerweiterungen invariant; aus der obigen Ungleichung ergibt sich daher:

$$\begin{aligned}d(MK_1,K_1) &= d(MK_1,K_1 1') \\ &= [MK_1 : K_1 1'] \\ &= [M1' : K1'] \cdot [MK_1 : M1'] / [K_1 1' : K1'] \\ &= d(M1',K1')[MK_1 : M1'] / [K_1 : K] \\ &< d(M1',K1') \\ &= d(M,K)\end{aligned}$$

$MK_1$ und $ML_1$ sind unverzweigte, galoissche p-Erweiterungen von $K_1$ bzw. $L_1$; wegen

$$d(ML_1,L_1) = d(MK_1,K_1) < d(M,K)$$

liegen nach Induktionsannahme $MK_1$ in $\tilde{K}_1\tilde{1} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)\tilde{1}$ und $ML_1$ in $\tilde{L}_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. Damit ist gezeigt, daß $M$ in $\tilde{L}_1 = \tilde{L}$ und in $\tilde{K}_1\tilde{1} = \tilde{K}\tilde{1}$ liegt.

Hieraus folgt: $\tilde{M} \subset \tilde{K}\tilde{1}$ und $\tilde{M} \subset \tilde{L}$

Satz 9 ist damit vollständig bewiesen.

## § 6 Absolut algebraische Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik

In den folgenden Paragraphen werden Nullklassengruppen und unverzweigte Erweiterungen von algebraischen Funktionenkörpern untersucht, deren Konstantenkörper absolut algebraische Körper von Primzahlcharakteristik, also algebraische Erweiterungen endlicher Körper, sind.

Es sei k ein absolut algebraischer Körper von Primzahlcharakteristik; im folgenden wird vorausgesetzt, daß k nicht endlich ist. Es sei K ein AF1 mit Konstantenkörper k.

Lemma 6.1.: Es existiert eine Kette von algebraischen Funktionenkörpern $K_n$ ( n = 0,1,.. ) mit den Eigenschaften:

a) Der Konstantenkörper von $K_n$ ist endlich.

b) $K_{n+1}$ ist eine Konstantenerweiterung von Primzahlgrad von $K_n$.

c) Die $K_n$ erzeugen K : $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = K$

Beweis: K ist über seinem Konstantenkörper k endlich erzeugbar; es existieren $x_1,..,x_r \in K$ mit: $k(x_1,..,x_r) = K$. Ist k' ein endlicher Teilkörper von k, so ist

$$K_o = k'(x_1,..,x_r)$$

ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper, und K ist eine Konstantenerweiterung von $K_o$: $K_o k = K$

Es sei $k_o$ der Konstantenkörper von $K_o$; da $k_o$ endlich und k abzählbar ist, existiert eine Kette von endlichen Teilkörpern $k_n$ von k, ( n = 1,2,.. ), in der $k_{n+1}$ eine Erweiterung von Primzahlgrad von $k_n$ ist ( n = 0,1,.. ) und die k erzeugt: $\bigcup_{n} k_n = k$

Die Kette ($K_n = K_o k_n$) besitzt dann die gewünschten Eigenschaften.

Für jeden Funktionenkörper mit nicht-endlichem, absolut algebraischem Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik sei im folgenden eine derartige Kette fest ausgezeichnet.

Als nächstes wird der Zusammenhang zwischen der Nullklassengruppe $\overline{D_0(K)}$ und den Nullklassengruppen $\overline{D_0(K_n)}$ untersucht.

Für $m \geq n$ ist $K_m$ eine endliche Konstantenerweiterung von $K_n$; da die Konstantenkörper endlich sind, ist $K_m$ eine galoissche Erweiterung von $K_n$; diese ist unverzweigt.

Die Conorm bettet die Divisorengruppe $D(K_n)$ in $D(K_m)$ ein:

$$\mathrm{Con}_{m,n}(\prod_v v^{n(v)}) = \prod_v \prod_{w|v} w^{n(v)} \qquad (\text{ w Fortsetzung der Bewertung v von } K_n \text{ auf } K_m \text{ })$$

Da jede Bewertung v von $K_n$ nur endlich viele Fortsetzungen auf K besitzt, läßt sich $D(K_n)$ analog in $D(K)$ einbetten:

$$\mathrm{Con}_n(\prod_v v^{n(v)}) = \prod_v \prod_{w|v} w^{n(v)} \qquad (\text{ w Fortsetzung von v auf K })$$

Diese Abbildung ist mit der Conorm $\mathrm{Con}_{m,n}$ verträglich, d.h., es gilt: $\mathrm{Con}_n = \mathrm{Con}_m \circ \mathrm{Con}_{m,n}$

Diese Abbildung ändert, da K eine Konstantenerweiterung von $K_n$ ist, den Grad der Divisoren von $K_n$ nicht:

$$\deg_{K_m}(\prod_v v^{n(v)}) = \deg_K(\mathrm{Con}_n(\prod_v v^{n(v)})) \;,\; \prod_v v^{n(v)} \in D(K_n)$$

Außerdem gehen bei $\mathrm{Con}_n$ Hauptdivisoren in Hauptdivisoren über. Daher induziert die Einbettung von $D(K_n)$ in $D(K)$ einen Homomorphismus der Nullklassengruppe von $K_n$ in die von K. Diese Abbildung ist die Verallgemeinerung der Conorm der Nullklassengruppen auf nicht-endliche Konstantenerweiterungen. Da die Conorm der Nullklassengruppen bei endlichen Konstantenerweiterungen injektiv ist und die Hauptdivisorengruppe H(K) wegen $K = \bigcup_n K_n$ die Vereinigung der Hauptdivisorengruppen $H(K_n)$ ist: $H(K) = \bigcup_n \mathrm{Con}_n(H(K_n))$,

wird $\overline{D_o(K_n)}$ monomorph in $\overline{D_o(K)}$ abgebildet; diese Einbettung ist natürlich mit der Conorm der Nullklassengruppen $\overline{D_o(K_n)}$ verträglich; das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overline{D_o(K_n)} & \searrow & \\ \downarrow & & \overline{D_o(K)} \\ \overline{D_o(K_m)} & \nearrow & \end{array} \qquad ( m \geq n )$$

ist kommutativ. Im folgenden wird daher $\overline{D_o(K_n)}$ stets als Untergruppe von $\overline{D_o(K)}$ aufgefaßt. Hierdurch wird $\overline{D_o(K_n)}$ auch zu einer Untergruppe von $\overline{D_o(K_m)}$ ( $m \geq n$ ); die zugehörige Einbettung stimmt mit der Conorm überein.

Lemma 6.2.: Die Nullklassengruppe von K ist die Vereinigung der Nullklassengruppen der $K_n$: $\overline{D_o(K)} = \bigcup_n \overline{D_o(K_n)}$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die Divisorengruppe von K die Vereinigung der Divisorengruppen $D(K_n)$ ist:

$$D(K) = \bigcup_n D(K_n)$$

Es sei w eine Bewertung von K; es sei v die Einschränkung von w auf $K_o$; r(v) sei die Anzahl der Fortsetzungen von v auf K. Es existiert ein Erweiterungskörper $K_n$, der r(v) Bewertungen besitzt, die Fortsetzungen von v sind. Ist v' die Einschränkung von w auf $K_n$, so besitzt v' nur eine Fortsetzung auf K; dies ist w. v' geht daher bei der Einbettung von $D(K_n)$ in D(K) in w über. Da die Bewertungen w von K eine Basis von D(K) bilden, folgt hieraus: $D(K) = \bigcup D(K_n)$

Dieses Lemma gestattet eine Aussage über die Struktur der Nullklassengruppe von K:

Satz 10 : Es sei K ein AF1 mit absolut algebraischem Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik;

a) Die Nullklassengruppe von K ist eine Torsionsgruppe.

b) Ist der Konstantenkörper von K nicht endlich und ist das Geschlecht von K ungleich 0, so ist die Nullklassengruppe von K nicht endlich.

Beweis: Der erste Teil des Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem obigen Hilfssatz.
Nach Lemma 3.8. gilt für die Klassenzahl von $K_n$, wenn g das Geschlecht von K und $K_n$ und $k_n$ den Konstantenkörper von $K_n$ bezeichnen:

$$h(K_n) \geq (|k_n|^{\frac{1}{2}} - 1)^{2g}$$

Unter den Voraussetzungen von b) folgt hieraus:

$$h(K_n) \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \longrightarrow \infty$$

Daher ist die Nullklassengruppe von K nicht endlich.

Für die folgenden Überlegungen ist es notwendig, den Begriff des Grades einer endlichen Körpererweiterung auf beliebige algebraische Erweiterungen zu verallgemeinern:

Definition: Es seien M und M′ zwei Körper; M′ sei ein algebraischer Erweiterungskörper von M. Das formale Produkt ( die Steinitz-Zahl; nach Serre: übernatürliche Zahl ):

$$[M' : M] = \prod_p p^{n(p)} \quad , \text{ p Primzahl, mit}$$

$$n(p) = \sup \{ n : M' \text{ enthält eine endliche Erweiterung } M'' \text{ von M derart, daß } p^n [M'' : M \text{ teilt}] \}$$

$$( 0 \leq n(p) \leq \infty )$$

heißt "Grad von M′ über M".

Es sei $\prod_p p^{n(p)}$ der Grad von K über $K_0$; ist n(p) endlich, so existiert eine Zahl N(p) mit der Eigenschaft:

6.1. Für alle $n \geq N(p)$ teilt $p^{n(p)}$ den Grad $[K_n : K]$.

Dies ist gleichbedeutend mit:

Für alle $m \geq n \geq N(p)$ sind $[K_m : K_n]$ und p teilerfremd.

Nach Lemma 6.2. ist die Nullklassengruppe von K die Vereinigung der Nullklassengruppen der $K_n$; entsprechend gilt für die p-Sylowgruppen von $\overline{D_o(K)}$ und den $\overline{D_o(K_n)}$:

6.2. $$\overline{D_o(K)}_p = \bigcup_n \overline{D_o(K_n)}_p$$

Unter speziellen Voraussetzungen sind schärfere Aussagen über den Zusammenhang zwischen $\overline{D_o(K)}_p$ und den $\overline{D_o(K_n)}_p$ möglich:

Die Norm von $\overline{D_o(K_m)}$ in $\overline{D_o(K_n)}$ ( $m \geq n$ ) bildet $\overline{D_o(K_m)}_p$ in $\overline{D_o(K_n)}_p$ ab ; es sei $N_n$ die Norm von $\overline{D_o(K_{n+1})}_p$ in $\overline{D_o(K_n)}_p$; es sei $C_n$ der Kern von $N_n$.

Ist der Exponent n(p) von p im Grad von K über $K_o$ endlich, so sei N(p) gemäß 6.1. gewählt; für $m \geq n \geq N(p)$ sind dann $[K_m : K_n]$ und p teilerfremd.

Es sei $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$ die p-Sylowgruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Satz 11 : Es sei K ein AF1 mit nicht-endlichem, absolut algebraischem Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik.

a) Ist der Exponent n(p) von p im Grad von K über $K_o$ endlich und ist $m \geq N(p)$ eine natürliche Zahl, so gilt für die p-Sylowgruppe der Nullklassengruppe von K:

$$\overline{D_o(K)}_p = \overline{D_o(K_m)}_p \times \prod_{n \geq m}^{\bullet} C_n \qquad \text{( direkte Summe )}$$

b) Ist der Exponent n(p) nicht endlich, der p-Rang der Nullklassengruppe von K jedoch endlich, so ist $\overline{D_o(K)}_p$ eine dividierbare p-Gruppe; es gilt also, wenn r(p) den p-Rang der Nullklassengruppe von K bezeichnet:

$$\overline{D_o(K)}_p \cong \prod_{r(p)} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$$

**Beweis:**

a) Für $r > N(p)$ sind $[K_r : K_{r-1}]$ und p teilerfremd; nach Lemma 5.1. gilt daher:

$$\overline{D_o(K_r)}_p = \overline{D_o(K_{r-1})}_p \times C_{r-1}$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich hieraus:

$$\overline{D_o(K_r)}_p = \overline{D_o(K_m)}_p \times \prod_{n=m}^{r-1} C_n \quad , \quad r \geq m \geq N(p)$$

Die Behauptung folgt jetzt aus:

$$\begin{aligned}\overline{D_o(K)}_p &= \bigcup_{r=0}^{\infty} \overline{D_o(K_r)}_p \\ &= \bigcup_{r=m}^{\infty} \overline{D_o(K_r)}_p \\ &= \bigcup_{r=m}^{\infty} \overline{D_o(K_m)}_p \times \prod_{n=m}^{r-1} C_n \\ &= \overline{D_o(K_m)}_p \times \prod^{\circ} C_n\end{aligned}$$

b) Für $n \geq n_o$ gilt: $p\text{-Rang}(\overline{D_o(K_n)}) = r(p)$

$K_{n+1}$ ist eine Konstantenerweiterung von Primzahlgrad von $K_n$; ist $[K_{n+1} : K_n]$ von p verschieden, so nimmt bei dieser Erweiterung der p-Bestandteil der Nullklassengruppe um einen direkten Faktor zu :

$$\overline{D_o(K_{n+1})}_p = \overline{D_o(K_n)}_p \times C_n$$

Da $\overline{D_o(K_{n+1})}_p$ und $\overline{D_o(K_n)}_p$ beide den p-Rang r(p) haben, gilt dann: $C_n = 1$

Es sei jetzt $[K_{n+1} : K_n]$ gleich p.

Da $K_{n+1}$ eine Konstantenerweiterung von $K_n$ ist, ist die Norm $N_n$ von $\overline{D_o(K_{n+1})}_p$ in $\overline{D_o(K_n)}_p$ surjektiv. $N_n$ induziert dann einen Epimorphismus

$$\overline{N} : \overline{D_o(K_{n+1})}_p / \overline{D_o(K_{n+1})}_p^p \longrightarrow \overline{D_o(K_n)}_p / \overline{D_o(K_n)}_p^p \qquad *)$$

Da diese beiden elementar-abelschen p-Gruppen denselben Rang besitzen, nämlich r(p) ( $n \geq n_o$ ), ist $\overline{N}$ sogar ein Isomorphismus. Die Einbettung von $\overline{D_o(K_n)}_p$ in $\overline{D_o(K_{n+1})}_p$

*) $A^p = \{ a^p \in A \}$ , A (multiplikative) abelsche Gruppe

induziert einen Homomorphismus:

$$\bar{j} : \overline{D_o(K_n)}_p / \overline{D_o(K_n)}^p_p \longrightarrow \overline{D_o(K_{n+1})}_p / \overline{D_o(K_{n+1})}^p_p$$

Die zusammengesetzte Abbildung

$$\bar{N} \circ \bar{j} : \overline{D_o(K_n)}_p / \overline{D_o(K_n)}^p_p \longrightarrow \overline{D_o(K_n)}_p / \overline{D_o(K_n)}^p_p$$

ist trivial, da die Norm $N_n$ jedes $x \in \overline{D_o(K_n)}_p$ in $x^p$ abbildet. Da $\bar{N}$ ein Isomorphismus ist, ist $\bar{j}$ schon die triviale Abbildung. Damit ist gezeigt:

6.3. $\overline{D_o(K_n)}_p \subset \overline{D_o(K_{n+1})}^p_p \qquad (n \geq n_o)$

Jedes Element von $\overline{D_o(K_n)}_p$ besitzt also eine p-te Wurzel in $\overline{D_o(K_{n+1})}_p$.

Der Exponent n(p) von p im Grad von K über $K_o$ ist nicht endlich; daher existieren unendlich viele $n \geq n_o$ mit $[K_{n+1} : K_n] = p$. Dann ist $\overline{D_o(K)}_p = \bigcup_{n \geq n_o} \overline{D_o(K_n)}_p$ eine teilbare Gruppe; diese hat den p-Rang r(p). Hieraus folgt ([8], 444):

$$\overline{D_o(K)}_p \cong \prod_{\nu(p)} (Q/\mathbb{Z})_p$$

Aus Satz 11 ergibt sich unmittelbar:

Corollar: Ist für alle Primzahlen p der Exponent n(p) endlich, so ist die Nullklassengruppe von K direkte Summe von endlichen Gruppen.

Bemerkung: Algebraische Funktionenkörper, für die die Voraussetzungen von Satz 11 b) erfüllt sind, werden in §9 konstruiert.

## § 7 Unverzweigte abelsche p-Erweiterungen

In diesem Paragraphen wird die Struktur der unverzweigten abelschen p-Erweiterungen von K untersucht, wobei K wieder ein AF1 mit nicht-endlichem, absolut algebraischem Konstantenkörper k von Primzahlcharakteristik ist.

Es sei $(K_n)$ ( $n \geq 0$ ) wieder eine Kette von Teilkörpern von K mit den Eigenschaften:

a) Der Konstantenkörper von $K_n$ ist endlich.

b) $K_{n+1}$ ist eine Konstantenerweiterung von Primzahlgrad von $K_n$.

c) Die $K_n$ erzeugen K : $\bigcup_n K_n = K$

Zunächst wird der Begriff der maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterung ( S28 ) verallgemeinert:

Definition: Eine Erweiterung L von K mit den Eigenschaften:

7.1. a) L ist das Kompositum von unverzweigten, abelschen p-Erweiterungen von K;

b) L besitzt denselben Konstantenkörper wie K;

c) L ist bezüglich der Eigenschaften a) und b) maximal;

wird "maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von K" genannt.

Es sei $L'_n$ die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von $K_n$ ( S.29 ); es sei

7.2. $L' = \bigcup_{n=0}^{\infty} L'_n$

Lemma 7.1.: Jede Erweiterung L von K, die die Eigenschaften von 7.1. besitzt, liegt in L': $L \subset L'$

Beweis: Es sei $K' \subset L$ eine endliche Erweiterung von K;

$K'$ ist eine primitive Erweiterung von K: $K' = K(a)$ ; $K'$ ist dann der Zerfällungskörper des Minimalpolynoms f von a über dem Körper K.

Für $n \geq n(f)$ enthält $K_n$ alle Koeffizienten von f; es sei $K''$ der Zerfällungskörper von f über $K_{n(f)}$; $K_n$ enthält für $n \geq n'(f) \geq n(f)$ auch den Konstantenkörper von $K''$. $K''K_n$ besitzt dann denselben Konstantenkörper wie $K_n$; für den Grad von $K''K_n$ über $K_n$ gilt daher:

$$[K''K_n : K_n] = [K''K_nk : K_nk]$$
$$= [K' : K]$$

Die Galoisgruppe von $K'$ über K ist zu einer Untergruppe der Galoisgruppe von $K_nK''$ über $K_n$ isomorph; da die Grade der Erweiterungen gleich sind, sind die Galoisgruppen von $K'$ über K und $K_nK''$ über $K_n$ selbst isomorph. $K_nK''$ ist also eine abelsche p-Erweiterung von $K_n$; außerdem ist die Erweiterung geometrisch und unverzweigt; $K_nK''$ liegt daher in $L'_n$. $K' = K_nK''k$ ist dann in $L'$ enthalten.
Da jede endliche Teilerweiterung $K' \subset L$ von K in $L'$ enthalten ist, liegt L ebenfalls in $L'$.

Es sei $L_o$ eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_o$; $L_oK_1$ ist dann eine unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_1$; $L_oK_1$ ist daher in einer maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterung $L_1$ von $K_1$ enthalten; entsprechend werden für $n \geq 2$ Körper $L_n$ gebildet.
Es sei: $L = \bigcup_{\sim} L_n$

Lemma 7.2.: L ist eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von K.

Beweis: L ist das Kompositum der unverzweigten, abelschen

p-Erweiterungen $L_n K$ von K; außerdem besitzt L nach Konstruktion denselben Konstantenkörper wie K; die Eigenschaften a) und b) von 7.1. sind demnach erfüllt. Jede Erweiterung von K, die diese Eigenschaften besitzt, ist in L' ( L' gemäß 7.1. ) enthalten. Da L' eine Konstantenerweiterung von L ist, ist L bezüglich dieser Eigenschaften maximal.

Eine Umkehrung von Lemma 7.2. wird ebenfalls bewiesen. Ist der Exponent $n(p)$ im Grad von K über $K_o$ endlich, so werde N(p) wieder gemäß 6.1. gewählt: Für $m \geq n \geq N(p)$ sind $[K_m : K_n]$ und p teilerfremd.

Satz 12 : Es sei L eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von K.
a) Ist n(p) endlich, so enthält L für alle $n \geq N(p)$ genau eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_n$.
b) Ist n(p) nicht endlich, so enthält L für alle n die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von $K_n$; insbesondere enthält L für alle n jede maximale, unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_n$.

Beweis:
a) Zuerst wird folgendes gezeigt:

7.2. Für $m \geq n \geq N(p)$ enthält jede maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung $L_m$ von $K_m$ eine maximale unverzweigte, geomertische, abelsche p-Erweiterung von $K_n$.

Es seien $L_n^i$ ( $i = 1,..,h_p(K_n)$ ) die verschiedenen maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterungen von $L_n$. $L_n^i L_n^j$ ist für $i \neq j$ eine nicht-triviale Konstantenerweiterung von $L_n^i$ und $L_n^j$, deren Grad eine p-Potenz ist.

Da $[K_m : K_n]$ und p teilerfremd sind, enthält $K_m L_n^i L_n^j$ für $i \neq j$ eine nicht-triviale Konstantenerweiterung von $K_m$. $K_m L_n^i$ ist für alle i eine geometrische Erweiterung von $K_m$; die Körper $K_m L_n^i$ sind daher paarweise verschieden.

$K_m L_n^i$ ist eine unverzweigte, geometrische, abelsche Erweiterung von $K_m$; zu ihr gehört eine Untergruppe $\langle a_i \rangle \times D_o^i$ der Divisorenklassengruppe $\overline{D(K_m)}$, wobei $D_o^i$ eine Untergruppe der Nullklassengruppe $\overline{D_o(K_m)}$ und $a_i$ eine Divisorenklasse vom Grad 1 ist ( Lemma 3.5. ). Die Erweiterungen $K_m L_n^i$ unterscheiden sich nur um Konstantenerweiterungen; das Kompositum $K_m L_n^i L_n^j$ ist eine Konstantenerweiterung von $K_m L_n^i$; die Gruppen $D_o^i$ stimmen daher alle überein. $D_o = D_o^i$ ist eine Untergruppe vom Index

$$\begin{aligned} ( \overline{D_o(K_m)} : D_o ) &= [K_m L_n^i : K_m] \\ &= [L_n^i : K_n] \\ &= h_p(K_n) \quad ( \text{p-Klassenzahl} ) \end{aligned}$$

von $\overline{D_o(K_m)}$. Ist $a \in \overline{D(K_m)}$ eine Divisorenklasse vom Grad 1, so bilden, da die Erweiterungen $K_m L_n^i$ ( $i = 1,..,h_p(K_n)$ ) von $K_m$ paarweise verschieden sind, die Divisorenklassen $a_i/a$ ein volles Repräsentantensystem von $\overline{D_o(K_m)}/D_o$ in $\overline{D_o(K_m)}$.

Es sei $L_m$ eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_m$. Zu $L_m$ gehört eine Gruppe $\langle b \rangle \times D_o'$ von Divisorenklassen; hierbei ist b eine Divisorenklasse vom Grad 1 und $D_o'$ die kleinste Untergruppe von $\overline{D_o(K_m)}$, für die die Faktorgruppe $\overline{D_o(K_m)}/D_o'$ eine p-Gruppe ist. $D_o'$ ist in $D_o$ enthalten. Zu $\langle b \rangle \times D_o$ gehört eine unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_m$; da die $a_i/a$ ein volles Repräsentantensystem von $\overline{D_o(K_m)}/D_o$ bilden, stimmt $\langle b \rangle \times D_o$ mit einer der Gruppen

$\langle a_i \rangle \times D_o$ überein; dieser entspricht umkehrbar eindeutig eine Erweiterung $K_m L_n^i$ von $K_m$; diese liegt, da $\langle b \rangle \times D_o'$ in $\langle b \rangle \times D_o$ enthalten ist, in $L_m$. Damit ist 7.2. bewiesen.

Es sei $L_n'$ wieder die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von $K_n$, und es sei $L' = \bigcup_n L_n'$.
$L_n = L \cap L_n'$ ist für $n \geq N(p)$ die größte in L enthaltene geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_n$. Nach Lemma 7.1. gilt:

$$\begin{aligned} L_n &= \bigcup_n (L \cap L_n') \\ &= L \cap \bigcup_n L_n' \\ &= L \cap L' \\ &= L \end{aligned}$$

Es wird gezeigt, daß $L_n$ für $n \geq N(p)$ eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_n$ ist. Es wird angenommen, daß $L_{n'}$ für ein $n'$ ( $\geq N(p)$ ) keine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_{n'}$ ist. Es seien $L^1, .., L^s$ diejenigen maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterungen von $K_{n'}$, die $L_{n'}$ enthalten. Falls $L^i L_m$ für ein festes i und alle $m \geq n'$ eine geometrische Erweiterung von $K_m$ ist, so ist $L^i L = L^i \bigcup_m L_m = \bigcup_m L^i L_m$ eine Erweiterung von K, die L echt enthält, denselben Konstantenkörper wie L und K besitzt und Kompositum von unverzweigten, abelschen p-Erweiterungen von K ist. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von L.
Für alle i existiere jetzt ein m(i) derart, daß $L^i L_m$ für $m \geq m(i)$ eine Konstantenerweiterung von $K_m$ enthält. Es sei $r \geq \max\{m(i) : i = 1, .., s\}$. Es sei $L_r''$ eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_r$, die $L_r$ enthält. $L_r''$ enthält dann auch $L_{n'}$ ; nach 7.3. enthält $L_r''$ eine maximale unverzweigte, geometrische,

abelsche p-Erweiterung von $K_{n'}$; einer der Körper $L^i$ liegt daher in $L'_r$; $L'_r L^i$ enthält keine Konstantenerweiterung von $K'_r$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von r; $L_{n'}$ ist also eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_{n'}$.

Da jede maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_n$ in $L'_n$ liegt, und $L_n$ als $L \cap L'_n$ definiert wurde, ergibt sich aus dem Beweis auch die Eindeutigkeit der in L enthaltenen maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterung von $K_n$ für $n \geq N(p)$.

b) Es sei jetzt n(p) nicht endlich.

$L'_n$ und L' seien wie in a) ( und 7.1. ) definiert. Da n(p) nicht endlich ist, enthält K für alle n jede Konstantenerweiterung von p-Potenzgrad von $K_n$. L' besitzt daher denselben Konstantenkörper wie K; außerdem ist L' das Kompositum der unverzweigten, abelschen p-Erweiterungen $L'_n K$ von K. Nach Lemma 7.1. liegt jede maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von K in L' enthalten. Daher ist L' ( für $n(p) = \infty$ ) selbst eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von K; L' ist auch die einzige. L' enthält nach Konstruktion für alle n die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung $L'_n$ von $K_n$.

Satz 12 b) ist damit ebenfalls bewiesen.

Es sei $L'_n$ wieder die maximale unverzweigte, abelsche p-Erweiterung von $K_n$; es sei $L' = \bigcup_n L'_n$.

Corollar 1 : Ist L eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von K, so ist L' eine Konstantenerweiterung von L.

Beweis: Ist der Exponent n(p) nicht endlich, so stimmt,

wie beim Beweis von Satz 12 b) gezeigt wurde, L mit L' überein.

Ist n(p) endlich, so ist $L'_n$ für $n \geq N(p)$ eine Konstantenerweiterung von $L_n = L \cap L'_n$; daher ist $LL'_n$ eine Konstantenerweiterung von $L = \bigcup_n L_n$. L' ist dann ebenfalls eine Konstantenerweiterung von L.

Jede maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von K ist als Kompositum abelscher Erweiterung von K selbst eine abelsche Erweiterung von K; die zugehörige Galoisgruppe ist eine kompakte topologische Gruppe.

Corollar 2 : Die Galoisgruppen aller maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterungen von K sind zueinander ( algebraisch und topologisch ) isomorph.

Beweis: Es sei G' die Galoisgruppe von L' über K; es sei

$$H' = \{g \in G : g \text{ operiert auf dem Konstantenkörper von } L' \text{ trivial}\}$$

Die Einschränkung der Automorphismen $h \in H'$ auf eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung L von K liefert, da L' eine Konstantenerweiterung von L ist, einen Isomorphismus von H' auf die Galoisgruppe von L über K.

Die Struktur der Galoisgruppen der maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterungen von K läßt sich mit Hilfe der p-Sylowgruppen $\overline{D_o(K_n)}_p$ der Nullklassengruppen bestimmen:

Für $m \geq n$ ist $K_m$ eine galoissche Konstantenerweiterung von $K_n$. Es sei $N_{m,n}$ die Norm von $\overline{D_o(K_m)}_p$ in $\overline{D_o(K_n)}_p$; $N_{n,n}$ ist die identische Abbildung von $\overline{D_o(K_n)}_p$; es gilt:

$$N_{l,n} = N_{m,n} \cdot N_{l,m} \qquad l \geq m \geq n$$

$( \overline{D_o(K_n)}_p, N_{m,n} )_n$ ist also ein projektives System; es sei P(K,p) dessen projektiver Limes:

7.4. $P(K,p) = \varprojlim \overline{D_o(K_n)}_p$

P(K,p) ist als projektiver Limes endlicher Gruppen eine kompakte topologische Gruppe. ([8], 56 ).

Lemma 7.3.: Die Galoisgruppen der maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterungen L von K sind zu P(K,p) algebraisch und topologisch isomorph.

Beweis:

1) Die Galoisgruppe G von L über K ist bis auf Isomorphie von der Wahl von L unabhängig; L kann daher speziell gewählt werden.

Es sei $L_o$ eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_o$; $L_oK_1$ ist dann eine unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_1$; $L_oK_1$ ist daher in einer maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterung $L_1$ von $K_1$ enthalten; für $n \geq 2$ wird $L_n$ entsprechend gewählt. $L = \bigcup_n L_n$ ist dann eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von K ( Lemma 7.2. ).

Es sei $G_n$ die Galoisgruppe von $L_n$ über $K_n$. Die Einschränkung der Automorphismen g $G_m$ auf $L_n$ ( $m \geq n$ ) liefert einen Epimorphismus $\pi_{m,n}$ von $G_m$ auf $G_n$. Für diese Abbildungen $\pi_{m,n}$ gilt:

$$\pi_{n,n} = \text{identische Abbildung von } G_n$$

$$\pi_{1,n} = \pi_{m,n} \cdot \pi_{1,m} \qquad 1 \leq m \leq n$$

$( G_n, \pi_{m,n} )_n$ ist daher ein projektives System; dessen projektiver Limes ist zur Galoisgruppe G von L über K algebraisch und topologisch isomorph. Um Lemma 7.3. zu beweisen,

genügt es daher zu zeigen, daß die beiden projektiven Systeme $( \overline{D_o(K_n)}_p, N_{m,n} )_n$ und $( G_n, \pi_{m,n} )_n$ isomorph sind, daß also Isomorphismen $f_n$ von $\overline{D_o(K_n)}_p$ in $G_n$ existieren, für die die Diagramme

7.5.
$$\begin{array}{ccc} \overline{D_o(K_m)}_p & \xrightarrow{f_m} & G_m \\ \downarrow{\scriptstyle N_{m,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{m,n}} \\ \overline{D_o(K_n)}_p & \xrightarrow{f_n} & G_n \end{array} \qquad m \geq n \geq 0$$

kommutativ sind.

2) Es seien $K'$ die separable Hülle von $K_o$ und $H$ die Galoisgruppe von $K'$ über $K_o$. Ist $C(K')$ der induktive Limes der Idelklassengruppen $C(K'')$, wobei $K''$ die endlich-galoisschen Erweiterungen von $K_o$ durchläuft, so ist $( C(K'), H )$ eine Klassenformation ([1], 64). Daher sind, wenn $( / )$ Normrestsymbole und $G( / )$ Galoisgruppen bezeichnen, die folgenden Diagramme kommutativ ([14], II 15/6 ):

$$\begin{array}{ccc} C(K_m) & \xrightarrow{(L_m/K_m)} & G(L_m/K_m) \quad ( = G_m ) \\ \downarrow{\scriptstyle \text{Id.}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{Proj.}} \\ C(K_m) & \xrightarrow{(L_nK_m/K_m)} & G(L_nK_m/K_m) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C(K_m) & \xrightarrow{(\ /\ )} & G(L_nK_m/K_m) \\ \downarrow{\scriptstyle N'_{m,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \cap} \\ C(K_n) & \xrightarrow{(\ /\ )} & G(L_nK_m/K_n) \end{array} \qquad N'_{m,n} \text{ Norm}$$

$$\begin{array}{ccc} C(K_n) & \xrightarrow{(\ /\ )} & G(L_nK_m/K_n) \\ \downarrow{\scriptstyle \text{Id.}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{Proj.}} \\ C(K_n) & \xrightarrow{(\ /\ )} & G(L_n/K_n) \quad ( = G_n ) \end{array}$$

Die Zusammenfassung ergibt das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} C(K_m) & \xrightarrow{(\ /\ )} & G_m \\ \downarrow{\scriptstyle N'_{m,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{m,n}} \\ C(K_n) & \xrightarrow{(\ /\ )} & G_n \end{array}$$

3) Die Normrestsymbole $(L_m/K_m)$ und $(L_n/K_n)$ sind epimorph. Der Kern von $(L_m/K_m)$ ist $N_{L_m/K_m}(C(L_m))$; der Kern von $(L_n/K_n)$ ist $N_{L_m/K_m}(C(L_n))$. Wegen

$$\begin{aligned} N_{L_m/K_m}(C(L_m)) &= \mathrm{Ker}((L_m/K_m)) \\ &\subset \mathrm{Ker}(\pi_{m,n}\cdot(L_m/K_m)) \\ &= \mathrm{Ker}((L_n/K_n)\cdot N'_{m,n}) \end{aligned}$$

liegt $N'_{m,n}(N_{L_m/K_m}(C(L_m)))$ in $N_{L_m/K_m}(C(L_n))$. Daher ist das folgende Diagramm, dessen waagerechte Abbildungen bijektiv sind, kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} C(K_m)/N_{L_m/K_m}(C(L_m)) & \longrightarrow & G_m \\ \downarrow N'_{m,n} & & \downarrow \pi_{m,n} \\ C(K_n)/N_{L_n/K_n}(C(L_n)) & \longrightarrow & G_n \end{array}$$

4) Da $L_m$ und $L_n$ unverzweigte Erweiterungen von $K_m$ bzw. $K_n$ sind, enthält $N_{L_m/K_m}(C(L_m))$ die Untergruppe $U(K_m)K_m^{\times}/K_m^{\times}$ und $N_{L_n/K_n}(C(L_n))$ die Untergruppe $U(K_n)K_n^{\times}/K_n^{\times}$ ( §3, 26/7 ); $U(\ )$ bezeichnet hierbei wieder die Ideleinheitengruppe. Daher gilt:

$$\begin{aligned} &C(K_m)/N_{L_m/K_m}(C(L_m)) \\ &\quad\cong C(K_m)/(U(K_m)K_m^{\times}/K_m^{\times}) \,/\, N_{L_m/K_m}(C(L_m))/(U(K_m)K_m^{\times}/K_m^{\times}) \\ &\quad= \overline{D(K_m)}/N_{L_m/K_m}(\overline{D(L_m)}) \end{aligned}$$

und

$$C(K_n)/N_{L_n/K_n}(L_n) = \overline{D(K_n)}/N_{L_n/K_n}(\overline{D(L_n)})$$

Die Norm $N'_{m,n}$ bildet $U(K_m)K_m^{\times}/K_m^{\times}$ in $U(K_n)K_n^{\times}/K_n^{\times}$ ab; daher ist auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overline{D(K_m)}/N_{L_m/K_m}(\overline{D(L_m)}) & \longrightarrow & C(K_m)/N_{L_m/K_m}(C(L_m)) \\ \downarrow N'_{m,n} & & \downarrow N_{m,n} \\ \overline{D(K_n)}/N_{L_n/K_n}(\overline{D(L_n)}) & \longrightarrow & C(K_n)/N_{L_n/K_n}(C(L_n)) \end{array}$$

kommutativ.

5) $L_m$ und $L_n$ besitzen dieselben Konstantenkörper wie $K_m$ bzw. $K_n$ und sind Erweiterungen von p-Potenzgrad von $K_m$ bzw. $K_n$; daher gilt:

$$\overline{D(K_m)}/N_{L_m/K_m}(\overline{D(L_m)}) \cong \overline{D_o(K_m)}/N_{L_m/K_m}(\overline{D_o(L_m)})$$
$$\cong \overline{D_o(K_m)_p}/N_{L_m/K_m}(\overline{D_o(L_m)_p})$$

und

$$\overline{D(K_n)}/N_{L_n/K_n}(\overline{D(L_n)}) \cong \overline{D_o(K_n)_p}/N_{L_n/K_n}(\overline{D_o(L_n)_p})$$

Durch Zusammenfassung der kommutativen Diagramme von 2), 3) und 4) ergibt sich hieraus das folgende kommutative Diagramm, dessen waagerechte Abbildungen bijektiv sind:

$$\begin{array}{ccc} \overline{D_o(K_m)_p}/N_{L/K}(\overline{D_o(L_m)_p}) & \longrightarrow & G_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{D_o(K_n)_p}/N_{L/K}(\overline{D_o(L_n)_p}) & \longrightarrow & G_n \end{array}$$

$\overline{D_o(K_m)_p}$ hat dieselbe Ordnung wie $G_m$, nämlich die Ordnung $h_p(K_m)$ ( p-Klassenzahl ); $\overline{D_o(K_n)_p}$ hat dieselbe Ordnung wie $G_n$, nämlich die Ordnung $h_p(K_n)$. Daher sind die Gruppen $N_{L/K}(\overline{D_o(L_m)_p})$ und $N_{L/K}(\overline{D_o(L_n)_p})$ trivial. Außerdem stimmt die Norm der Nullklassengruppe mit der Norm überein, die durch die Norm der Idelklassengruppen induziert wird ( §2 ). Das obige Diagramm erfüllt also die Bedingungen, die an 7.5. gestellt wurden.

Mit Hilfe von Lemma 7.3. läßt sich in den Fällen, für die in Satz 11 die p-Sylowgruppe der Nullklassengruppe von K bestimmt wurde, auch die Galoisgruppe der maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterungen von K angeben:
Ist der Exponent von p im Grad von K über $K_o$ endlich, so sei N(p) wieder derart gewählt, daß $[K_m : K_n]$ und p für

alle $m \geq n \geq N(p)$ teilerfremd sind.

Es sei $C_n$ wieder der Kern der Norm $N_n$ von $\overline{D_o(K_{n+1})_p}$ in $\overline{D_o(K_n)_p}$; $C_n$ und $\overline{D_o(K_n)_p}$ werden als diskrete topologische Gruppen aufgefaßt.

Es sei $\mathbb{Z}_p$ die additive Gruppe des Ringes der ganzen p-adischen Zahlen; $\mathbb{Z}_p$ ist eine kompakte topologische Gruppe. ([8], 110).

Satz 13 : Es sei K ein AF1 mit nicht-endlichem, absolut algebraischem Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik. Es sei G die Galoisgruppe einer maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterung von K.

a) Ist der Exponent n(p) von p im Grad von K über $K_o$ endlich und ist $m \geq N(p)$ eine natürliche Zahl, so ist G zu $\overline{D_o(K_m)_p} \times \prod_{n \geq m} C_n$, versehen mit der Produkttopologie, algebraisch und topologisch isomorph:

$$G = \overline{D_o(K_m)_p} \times \prod_{n \geq m} C_n \qquad (\ m \geq N(p)\ )$$

b) Ist der Exponent n(p) nicht endlich, der p-Rang der Nullklassengruppe von K jedoch endlich, so ist G, wenn r(p) den p-Rang der Nullklassengruppe von K bezeichnet, zum r(p)-fachen Produkt von $\mathbb{Z}_p$ algebraisch und topologisch isomorph:

$$G = \prod_{r(p)} \mathbb{Z}_p$$

Beweis:

a) Nach dem Beweis von Satz 11 a) gilt für $r \geq s \geq N(p)$:

$$\overline{D_o(K_r)_p} = \overline{D_o(K_s)_p} \times \prod_{n=s}^{r-1} C_n$$

$\prod_{n=s}^{r-1} C_n$ ist der Kern der Norm $N_{r,s}$ von $\overline{D_o(K_r)_p}$ in $\overline{D_o(K_s)_p}$.

Für den projektiven Limes der $\overline{D_o(K_n)_p}$ ergibt sich daher:

$$\varprojlim \overline{D_o(K_n)_p} = \varprojlim \overline{D_o(K_n)_p}$$

$$= \varprojlim \overline{D_o(K_m)_p} \times \prod_{r=m}^{r-1} C_r \qquad =$$

$$\cong \overline{D_o(K_m)}_p \times \varprojlim \prod_{r=m}^{n-1} C_r$$

$$\cong \overline{D_o(K_m)}_p \times \prod_{n \geq m} C_n$$

Aus Lemma 7.3. folgt jetzt die Behauptung.

b) Für alle $n \geq n_o$ hat die Nullklassengruppe von $K_n$ den p-Rang r(p).

Im Falle $[K_{n+1} : K_n] = p' \neq p$ stimmen, da $\overline{D_o(K_{n+1})}_p$ und $\overline{D_o(K_n)}_p$ denselben p-Rang besitzen, diese beiden Gruppen überein ( S. 57 ) und die Norm $N_n$ bildet jedes $x \in \overline{D_o(K_{n+1})}_p$ in $x^{p'}$ ab, sie liefert also einen Automorphismus dieser Gruppe.

Im Falle $[K_{n+1} : K_n] = p$ gilt nach 6.3.:

$$\overline{D_o(K_n)}_p \subset \overline{D_o(K_{n+1})}_p^p$$

Auf Grund der bisherigen Überlegungen und Lemma 7.3. ergibt sich jetzt die Behauptung aus

Lemma 7.4. : Es sei $(A_n)_{n \geq 1}$ eine aufsteigende Kette von endlichen abelschen p-Gruppen vom p-Rang r mit

$$A_{n-1} \subset A_n^p$$

Es seien $f_n : A_n \dashrightarrow A_{n-1}$ Epimorphismen mit $f_n(a) = a^p$ für $a \in A_{n-1}$.

Dann gilt: $\varprojlim(A_n, f_n) \cong \prod_r \mathbb{Z}_p$

Beweis:

a) Es sei $A = \bigcup_n A_n$ . Jedes $A_n$ hat den p-Rang r, außerdem gilt $A_{n-1} \subset A_n^p$ ; A ist daher eine teilbare Gruppe vom p-Rang r . $C = \{ a \in A : a^{p^2} = 1 \}$ ist dann eine endliche Gruppe der Ordnung $p^{2r}$. Da $A_1$ den p-Rang r hat und jedes Element von $A_1$ in $A_2$ eine p-te Wurzel besitzt, liegt C in $A_2$ und daher auch in allen $A_n$ ( $n \geq 2$ ).

Beh.: Für $n \geq 3$ gilt: $\mathrm{Ker}(f_n) = \{ x \in A_n : x^p = 1 \}$

Bew.: Ist $x \in A_n$ mit $x^p = 1$, so liegt, da $A_n$ und $A_{n-1}$ denselben p-Rang besitzen, x in $A_{n-1}$, und es gilt:

$$f(x) = x^p = 1$$

Dies zeigt die Inklusion "$\supset$".
Es sei $x \in A_n$ mit $x^{p^{n-1}} = 1$, $x^p \neq 1$. x liegt dann in C, also auch in $A_{n-1}$; daher gilt:

$$f(x) = x^p \neq 1$$

Hieraus folgt die umgekehrte Inklusion.

b) Es sei $a_1,..,a_r$ eine Basis von $A_{n-1}$ ( $n \geq 3$ ); es seien $b_1,..,b_r \in A_n$ mit $f_n(b_i) = a_i$ ( $i = 1,..,r$).

Beh.: $b_1,..,b_r$ ist eine Basis von $A_n$.

Bew.: $B = \langle b_1,..,b_r \rangle$ ist eine Gruppe vom p-Rang r, da $f_n(B) = A_{n-1}$ den p-Rang r hat. Daher gilt:

$$|\{ x \in B : x^p = 1 \}| = p^r$$

Hieraus folgt:

$$\{ x \in B : x^p = 1 \} = \{ x \in A_n : x^p = 1 \} = \mathrm{Ker}(f_n)$$

Wegen $B/\mathrm{Ker}(f_n) \cong A_{n-1} \cong A_n/\mathrm{Ker}(f_n)$

stimmt B dann mit $A_n$ überein; $b_1,..,b_r$ bildet daher ein Erzeugendensystem von $A_n$. Es ist noch zu zeigen, daß diese Elemente unabhängig sind.

Aus: $\prod_i b_i^{n_i} = 1$

folgt: $1 = \prod_i N(b_i)^{n_i} = \prod_i a_i^{n_i}$

Da die $a_i$ eine Basis bilden, gilt dann: $a_i^{n_i} = 1$

Jedes $n_i$ ist daher durch p teilbar; es sei $m_i = n_i/p$.

Für $b = \prod_i b_i^{m_i}$ gilt dann: $b^p = 1$

b liegt daher im Kern von $f_n$.

Aus: $1 = N(b) = N(\prod_i b_i^{m_i}) = \prod_i a_i^{m_i}$

folgt $a_i^{m_i} = 1 \quad (i = 1,..,r)$

und hieraus $b_i^{m_i} \in \mathrm{Ker}(f_n)$

Dann gilt:

$$1 = (b_i^{m_i})^p = b_i^{n_i} \quad (i = 1,..,r)$$

Dies zeigt die Unabhängigkeit der $b_i$.

c) Es sei $a_{1,2},\ldots,a_{r,2}$ eine Basis von $A_2$; es seien $a_{1,3},\ldots,a_{r,3} \in A_3$ mit: $f_3(a_{i,3}) = a_{i,2}$ Diese Elemente bilden dann eine Basis von $A_3$. Entsprechend werden Basen von $A_4,\ldots$ gebildet.

Dann gilt:

$$\varprojlim_{n\geq 1}(A_n,f_n) \cong \varprojlim_{n\geq 2} A_n$$

$$\cong \varprojlim \langle a_{1,n}\rangle \times \cdots \langle a_{r,n}\rangle$$

$$\cong \varprojlim \langle a_{1,n}\rangle \times \cdots \varprojlim \langle a_{r,n}\rangle$$

$f_n$ als Abbildung von $\langle a_{i,n}\rangle$ in $\langle a_{i,n-1}\rangle$ ist surjektiv; da $A = \bigcup A_n$ eine teilbare Gruppe ist, gilt:

$$|a_{i,n}| \dashrightarrow \infty$$

Daher ist $\varprojlim \langle a_{i,n}\rangle$ [illegible] projektiven Limes des Systems $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ isomorph; dies aber ist $\mathbb{Z}_p$.

Hieraus ergibt sich jetzt die Behauptung von Lemma 7.4. :

$$\varprojlim A_n \cong \prod_r \mathbb{Z}_p$$

## § 8 Dualitätssätze

In diesem Paragraphen werden Zusammenhänge zwischen der p-Sylowgruppe der Nullklassengruppe von K, wobei K wieder einen AF1 mit nicht-endlichem, absolut algebraischem Konstantenkörper k von Primzahlcharakteristik bezeichnet, und den unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterungen von K untersucht.

Es sei $(K_n)_{n\geq 0}$ wieder eine Kette von Teilkörpern von K mit den Eigenschaften:

a) Der Konstantenkörper von $K_n$ ist endlich.

b) $K_{n+1}$ ist eine Konstantenerweiterung von Primzahlgrad von $K_n$.

c) Die $K_n$ erzeugen K : $\bigcup_n K_n = K$

Die Zusammenfassung von Satz 11 und Satz 13 ergibt:

Satz 14 : Es seien $\overline{D_o(K)}_p$ die p-Sylowgruppe der Nullklassengruppe von K und G die Galoisgruppe einer maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterung von K.
Der Exponent n(p) von p im Grad von K über $K_o$ oder der p-Rang der Nullklassengruppe von K sei endlich.
Dann bilden die diskrete Gruppe $\overline{D_o(K)}_p$ und die kompakte Gruppe G ein duales Paar topologischer Gruppen; G ist zur Charaktergruppe von $\overline{D_o(K)}_p$ und $\overline{D_o(K)}_p$ zur Charaktergruppe von G algebraisch und topologisch isomorph.

Beweis: Auf Grund des Dualitätssatzes für kompakte und diskrete topologische Gruppen ( [15], 134/146 ) genügt es zu zeigen, daß G zur Charaktergruppe von $\overline{D_o(K)}_p$ algebraisch und topologisch isomorph ist.
Zunächst wird der Fall betrachtet, daß der Exponent n(p)

von p endlich ist.

Es sei N(p) wie früher gewählt; für alle $n \geq N(p)$ sind $[K_{n+1} : K_n]$ und p teilerfremd. Es sei $C_n$ wieder der Kern der Norm $N_n$ von $\overline{D_o(K_{n+1})}_p$ in $\overline{D_o(K_n)}_p$. Dann gilt nach Satz 11 für $\overline{D_o(K)}_p$:

$$\overline{D_o(K)}_p = \overline{D_o(K_m)}_p \times \prod_{n \geq m} C_n \qquad (m \geq N(p) \text{ beliebig})$$

Da $\overline{D_o(K)}_p$ eine diskrete Gruppe ist, die direkte Summe von Untergruppen ist, ist die Charaktergruppe zum Produkt der Charaktergruppen der einzelnen Summanden isomorph. Jeder Summand ist eine endliche Gruppe, seine Charaktergruppe ist also zu ihm selbst isomorph. Die Charaktergruppe von $\overline{D_o(K)}_p$ ist daher zu $\overline{D_o(K_m)}_p \times \prod_{n \geq m} C_n$ isomorph, wobei jeder Faktor dieser Gruppe die diskrete Topologie und das Produkt die Produkttopologie besitzt. Nach Satz 13 ist die Galoisgruppe G ebenfalls zu dieser Gruppe isomorph.

Es sei n(p) jetzt nicht endlich; der p-Rang der Nullklassengruppe von K sei jedoch endlich, r(p) sei diese Zahl.

Es sei $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$ die p-Sylowgruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. $\overline{D_o(K)}_p$ ist nach Satz 11 zum r(p)-fachen Produkt von $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$, versehen mit der diskreten Topologie, isomorph:

$$\overline{D_o(K)}_p \cong \prod_{r(p)} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$$

Da $\overline{D_o(K)}_p$ diskret ist, ist die Charaktergruppe zum Produkt der Charaktergruppen der einzelnen Faktoren isomorph. Die Charaktergruppe der diskreten Gruppe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$ ist zur additiven Gruppe $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen isomorph. Die Charaktergruppe von $\overline{D_o(K)}_p$ ist daher zu $\prod_{r(p)} \mathbb{Z}_p$ isomorph; diese Gruppe wiederum ist nach Satz 13 zur Galoisgruppe G isomorph.

Wenn der Exponent n(p) von p im Grad von K über $K_o$ endlich ist, lassen sich diejenigen endlichen Erweiterungen von K, die in einer festen maximalen unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterung von K liegen, umkehrbar eindeutig durch Untergruppen der p-Sylowgruppe der Nullklassengruppe von K charakterisieren; wie im Falle der Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper wird jeder derartigen Erweiterung von K eine Normgruppe zugeordnet.

Es sei N(p) wieder derart gewählt, daß $[K_{n+1} : K_n]$ und p für alle $n \geq N(p)$ teilerfremd sind.

Es sei $C_n$ der Kern der Norm $N_n$ von $\overline{D_o(K_{n+1})}_p$ in $\overline{D_o(K_n)}_p$.

Für die p-Sylowgruppe der Nullklassengruppe von K gilt dann:

$$\overline{D_o(K)}_p = \overline{D_o(K_m)}_p \times \prod_{n \geq m} C_n \qquad (m \geq N(p) \text{ beliebig})$$

Satz 15 : Der Exponent n(p) von p im Grad von K über $K_o$ sei endlich; es sei L eine maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von K.

a) Ist $K' \subset L$ eine endliche Erweiterung von K, so enthält die Normgruppe $N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p)$ fast alle $C_n$; außerdem ist ist die Galoisgruppe G' von K' über K zur Faktorgruppe $\overline{D_o(K)}_p / N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p)$ isomorph.

b) Ist D' eine Untergruppe von $\overline{D_o(K)}_p$, die fast alle $C_n$ enthält, so existiert genau eine endliche Erweiterung $K' \subset L$ von K mit: $D' = N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p)$

Sind D' und D'' zwei Untergruppen von $\overline{D_o(K)}_p$, die fast alle $C_n$ enthalten, und sind $K' \subset L$ und $K'' \subset L$ die ihnen entsprechenden Erweiterungen von K, so entspricht $D' \cdot D''$ die Erweiterung $K' \cap K''$ und $D' \cap D''$ die Erweiterung $K' \cdot K''$.

Beweis:

a) Es sei $K' \subset L$ eine endliche Erweiterung von K.

Für $n \geq N(p)$ sei $L_n$ die in L enthaltene maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_n$; $L_n$ ist für $m \geq n$ in $L_m$ enthalten, und L ist die Vereinigung der $L_n$: $\bigcup_n L_n = L$ ( Satz 12 )

L ist auch die Vereinigung der Körper $KL_n$: $\bigcup_n KL_n = L$

Da K' eine endliche Erweiterung von K ist, die in L enthalten ist, liegt K' für alle $n \geq n(K')$ ( $\geq N(p)$ ) in $KL_n$.

Es sei $K'_n = K' \cap L_n$ ( $n \geq n(K')$ ); K' ist eine Konstantenerweiterung von $K'_n$, und die Vereinigung der $K'_n$ stimmt mit K' überein:

$$\begin{aligned} \bigcup_n K'_n &= \bigcup_n (K' \cap L_n) \\ &= K' \cap \bigcup_n L_n \\ &= K' \cap L \\ &= K' \end{aligned}$$

Die p-Sylowgruppe $\overline{D_o(K')}_p$ der Nullklassengruppe von K' ist dann die Vereinigung der Gruppen $\overline{D_o(K'_n)}_p$:

$$\overline{D_o(K')}_p = \bigcup_n \overline{D_o(K'_n)}_p$$

$K'_n$ ist für $n \geq n(K')$ eine abelsche Erweiterung von $K_n$, deren Galoisgruppe zur Galoisgruppe von K' über K isomorph ist; dieser Isomorphismus wird von der Einschränkung der Automorphismen von K' über K auf $K'_n$ geliefert.

Für die Norm von $\overline{D_o(K')}_p$ in $\overline{D_o(K)}_p$ gilt daher:

$$\begin{aligned} N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p) &= N_{K'/K}(\bigcup_n \overline{D_o(K'_n)}_p) \\ &= \bigcup_n N_{K'/K}(\overline{D_o(K'_n)}_p) \\ &= \bigcup_n N_{K'_n/K_n}(\overline{D_o(K'_n)}_p) \end{aligned} \tag{8.1.}$$

Es sei $N'_n$ die Norm von $\overline{D_o(K'_{n+1})}_p$ in $\overline{D_o(K'_n)}_p$; zur Abkürzung

werde $D'_n = N_{K'_m/K_m}(\overline{D_o(K'_m)}_p)$ gesetzt.
Das wesentliche Hilfsmittel für die weiteren Überlegungen ist der folgende Hilfssatz:

Lemma 8.1.: Für alle $n \geq n(K')$ gilt: $D'_{n+1} = D'_n \times C_n$

Beweis:

1) Es sei $m \geq n(K')$. $K'_m$ ist eine unverzweigte, geometrische, abelsche Erweiterung von $K_m$; der Konstantenkörper von $K_m$ ist endlich. Nach Lemma 3.5. ist daher die Galoisgruppe von $K'_m$ über $K_m$ zu $\overline{D_o(K_m)}/N_{K'_m/K_m}(\overline{D_o(K'_m)})$ isomorph; da $K'_m$ eine Erweiterung von p-Potenzgrad von $K_m$ ist, ist die Galoisgruppe auch zu $\overline{D_o(K_m)}_p/D'_m$ isomorph.
Für $n \geq n(K')$ sind die Galoisgruppen von $K'_{n+1}$ über $K_{n+1}$ und von $K'_n$ über $K_n$ isomorph; beide sind zur Galoisgruppe von $K'$ über $K$ isomorph. Es gilt daher:

$$|\overline{D_o(K_{n+1})}_p|/|D'_{n+1}| = |\overline{D_o(K_n)}_p|/|D'_n|$$

Wegen $\overline{D_o(K_{n+1})}_p = \overline{D_o(K_n)}_p \times C_n$ folgt hieraus:

$$|D'_{n+1}|/|D'_n| = |C_n|$$

2) $K'_{n+1}$ ist eine Konstantenerweiterung von $K'_n$. Bei Konstantenerweiterungen ist die Norm der Nullklassengruppen epimorph; es gilt daher auch:

$$N'_n(\overline{D_o(K'_{n+1})}_p) = \overline{D_o(K'_n)}_p$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} N'_n(D'_{n+1}) &= N_n N_{K'_{n+1}/K_{n+1}}(\overline{D_o(K'_{n+1})}_p) \\ &= N_{K'_{n+1}/K_n}(\overline{D_o(K'_{n+1})}_p) \\ &= N_{K'_n/K_n} N'_n(\overline{D_o(K'_{n+1})}_p) \\ &= N_{K'_n/K_n}(\overline{D_o(K'_n)}_p) \\ &= D'_n \end{aligned}$$

Der Kern der Einschränkung von $N_n$ auf $D'_{n+1}$ ist $D'_{n+1} \cap C_n$; daher gilt:

$$D'_{n+1}/D'_{n+1} \cap C_n \cong D'_n$$

und

$$|D'_{n+1}| / |D'_n| = |D'_{n+1} \cap C_n|$$

Der Vergleich mit 1) zeigt jetzt, daß $C_n$ in $D'_{n+1}$ enthalten ist. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} D'_{n+1} &= D'_{n+1} \cap \overline{D_o(K_{n+1})_p} \\ &= D'_{n+1} \cap (C_n \times \overline{D_o(K_n)_p}) \\ &= C_n \times (D'_{n+1} \cap D_o(K_n)_p) \end{aligned}$$

Zum Beweis von Lemma 8.1. ist also noch:

$$D'_{n+1} \cap \overline{D_o(K_n)_p} = D'_n$$

zu zeigen.

3) Die Galoisgruppe $G_n$ von $K_{n+1}$ über $K_n$ operiert auf $\overline{D_o(K_n)_p}$ trivial; für die Norm $N_n$ gilt also:

$$N_n(x) = x^{|G|} \quad \text{für } x \in \overline{D_o(K_n)_p}$$

Da $|G_n|$ und p teilerfremd sind, liefert die Einschränkung der Norm $N_n$ auf $\overline{D_o(K_n)_p}$ einen Automorphismus von $\overline{D_o(K_n)_p}$, bei dem jede Untergruppe in sich übergeht. Aus

$$\begin{aligned} N_n(D'_{n+1} \cap \overline{D_o(K_n)_p}) &= N_n(C_n \times (D'_{n+1} \cap \overline{D_o(K_n)_p}) \\ &= N_n(D'_{n+1}) \qquad \text{( nach 2) )} \\ &= D'_n \end{aligned}$$

ergibt sich: $D'_{n+1} \cap \overline{D_o(K_n)_p} = D'_n$

Aus diesem Hilfssatz folgt durch vollständige Induktion:

$$D'_m = D'_{n(K')} \times \prod_{n=n(K')}^{m-1} C_n \qquad m \geq n(K')$$

Aus 8.1. ergibt sich hieraus:

$$N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p) = \bigcup_m D'_{n(K')} \overline{\prod_{n\geq n(K')}^{m-1} C_n}$$
$$= D'_{n(K')} \times \overline{\prod_{n\geq n(K')}^{\circ} C_n}$$

Die Normgruppe $N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p)$ enthält also für $n \geq n(K')$ alle $C_n$; dies ist die erste Behauptung von Satz 15 a).

Für die Faktorgruppe $\overline{D_o(K)}_p/N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p)$ gilt:

$$\overline{D_o(K)}_p/N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p)$$
$$= \overline{D_o(K_{n(K')})}_p \times \overline{\prod_{n\geq n(K')}^{\circ} C_n}/D'_{n(K')} \times \overline{\prod_{n\geq n(K')}^{\circ} C_n}$$
$$\cong \overline{D_o(K_{n(K')})}_p/D'_{n(K')}$$

Die letzte Faktorgruppe ist, wie beim 1. Beweisschritt von Lemma 8.1. bemerkt wurde, zur Galoisgruppe von $K'_{n(K')}$ über $K_{n(K')}$, also auch zur Galoisgruppe von K' über K isomorph.

b) Es sei D' eine Untergruppe von $D_o(K)_p$, die fast alle $C_n$ enthält. D' enthält für $m \geq n(D')$ ( $\geq N(p)$ ) die Gruppe $\overline{\prod_{n\geq m}^{\circ} C_n}$. Mit $E'_m = D' \cap \overline{D_o(K_m)}_p$ gilt dann:

$$D' = E'_m \times \overline{\prod_{n\geq m}^{\circ} C_n}$$

$E'_m$ ist Normgruppe einer Erweiterung $K'_m$ von $K_m$, die in $L_m$, der in L enthaltenen maximalen, unverzweigten, geometrischen, abelschen p-Erweiterung von $K_m$, liegt:

$$N_{K'_m/K_m}(\overline{D_o(K'_m)}_p) = E'_m$$

Dann gilt nach a) für $K' = KK'_m$:

$$N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p) = E'_m \times \overline{\prod_{n\geq m}^{\circ} C_n}$$
$$= D'$$

Damit ist die Existenz einer Erweiterung K' ( $\subset L$ ) von K gezeigt, deren Normgruppe D' ist.

Ist $K'' \subset L$ eine endliche Erweiterung von K, so ist $K''$ die Vereinigung der gemäß a) definierten Körper $K_n''$. Im Falle $N_{K''/K}(\overline{D_o(K'')}_p) = D'$ entspricht $K_m''$ die Normgruppe $E_m'$; $K_m''$ stimmt dann mit $K_m'$, also auch $K''$ mit $K'$ überein. Dies zeigt die Eindeutigkeit der zu $D'$ gehörenden Erweiterung von K.

Die übrigen Aussagen von Satz 15 b) gelten, da sie auf Aussagen über Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper zurückgeführt werden können und für jene Körper richtig sind.

Auf $\overline{D_o(K)}_p$ läßt sich durch die Forderung, daß eine Untergruppe U genau dann offen ist, wenn sie eine Normgruppe ist:

$$U = N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p) \quad , \; K' \subset L, \; K' \text{ über } K \text{ endlich}$$

eine Topologie definieren, die Normtopologie.

Die Gruppe $\overline{D_o(K)}_p$ hat die Form:

$$\overline{D_o(K)}_p = \overline{D_o(K_{N(p)})} \times \prod_{n \geq N(p)}^{\circ} C_n$$

Die Galoisgruppe G von L über K ist zu $\overline{D_o(K_{N(p)})} \times \prod_{n \geq N(p)}^{\circ} C_n$ isomorph. $\overline{D_o(K)}_p$ läßt sich daher in G einbetten; für die induzierte Topologie auf $\overline{D_o(K)}_p$ gilt:

Corollar 1 : Die durch die Einbettung von $\overline{D_o(K)}_p$ in die Galoisgruppe G von L über K induzierte Topologie auf $\overline{D_o(K)}_p$ ist die Normtopologie; die Vervollständigung von $D_o(K)_p$ bezüglich dieser Topologie ist zu G isomorph.

Beweis: Für $n \geq N(p)$ sei $D_n = \prod_{m \geq n}^{\circ} C_m$. Jedes $D_n$ ist eine Normgruppe von $\overline{D_o(K)}_p$; ist $L_n$ die in L enthaltene maximale unverzweigte, geometrische, abelsche p-Erweiterung von $K_n$, so gilt für $KL_n$:

$$N_{KL_n/K}(\overline{D_o(KL_n)}_p) = D_n \qquad \text{( nach dem Beweis von Satz 15 a) )}$$

Umgekehrt enthält jede Normgruppe U von $\overline{D_o(K)}_p$ für $n \geq n(U)$ die Gruppen $D_n$. Daher bilden die $D_n$ eine Umgebungsbasis der Eins in $\overline{D_o(K)}_p$ bezüglich der Normtopologie. Der Durchschnitt der $D_n$ besteht nur aus der Eins:

$$\bigcap_n D_n = \bigcap_m \prod_{m>2} C_m = \{1\}$$

Die Vervollständigung von $\overline{D_o(K)}_p$ bezüglich der Normtopologie ist dann zum projektiven Limes der Gruppen

$$\overline{D_o(K)}_p / D_n$$

isomorph ([3], 94 ). Dieser ist zu $\overline{D_o(K_{N(p)})}_p \times \prod_{p \nmid N(p)} C_n$ isomorph. Hieraus ergeben sich die Aussagen des Corollars.

Die obigen Ergebnisse lassen sich verallgemeinern:
Es sei $\prod p^{n(p)}$ der Grad von K über $K_c$; es seien

$$S = \{p : n(p) < \infty\} \quad \text{und} \quad S' = \{p : n(p) = \infty\}$$

Es sei K' eine endliche, unverzweigte, geometrische, abelsche Erweiterung von K. Die Galoisgruppe G' von K' über K läßt sich in ihre p-Sylowgruppen zerlegen:

$$G = \prod_p G_p \quad , \quad G_p \text{ p-Sylowgruppe von } G$$

Dann gilt:

Corollar 2 : Die Faktorgruppe $\overline{D_o(K)}/N_{K'/K}(\overline{D_o(K')})$ ist zu $\prod_{p \in S} G_p$ isomorph.

Beweis: Es ist zu zeigen:

$$\overline{D_o(K)}_p / N_{K'/K}(\overline{D_o(K')}_p) \quad \begin{cases} = G_p & , p \in S \\ = \{1\} & , p \in S' \end{cases}$$

Es sei $K'_p$ der Fixkörper von $\prod_{p' \neq p} G_{p'}$. Da p und $|\prod G_{p'}|$ teilerfremd sind, ist die Norm von $\overline{D_o(K')}_p$ in $\overline{D_o(K'_p)}_p$ surjektiv. Es genügt also zu zeigen:

$$\overline{D_o(K)}_p / N_{K'/K}(\overline{D_o(K'_p)}_p) \quad \begin{cases} = G_p & , p \in S \\ = \{1\} & , p \in S' \end{cases}$$

Im Falle $p \in S$ liegt $K'_p$ in einer maximalen unverzweigten,

geometrischen, abelschen p-Erweiterung von K; die Behauptung ergibt sich dann aus Satz 15 a).
Es sei jetzt $p \in S'$. Es wird gezeigt, daß die Norm der Divisorengruppe surjektiv ist; die Norm der p-Sylowgruppe der Nullklassengruppe ist dann ebenfalls surjektiv.
Da der Exponent n(p) nicht endlich ist, besitzt der Konstantenkörper von K keine algebraischen Erweiterungen von p-Potenzgrad. Bei der Erweiterung $K'_p$ von K ist der Restklassengrad jeder Bewertung von K gleich 1. Für die Norm der Divisorengruppe gilt dann:

$$N_{K'/K}\left(\prod_w w^{n(w)}\right) = \prod_v v^{n(w)} \quad , \quad \begin{array}{l} w \text{ Bewertung von } K'_p, \\ v \text{ Einschränkung von} \\ \quad w \text{ auf } K \end{array}$$

Die Norm der Divisorengruppe ist daher surjektiv.

Bemerkungen:

1) Von M. Moriya ([13]) wurde ( ohne ausgeführtem Beweis ) ein Satz angegeben, der die Aussagen von Satz 15 im wesentlichen enthält; gewisse Untergruppen der Divisorenklassengruppe von K entsprechen umkehrbar eindeutig unverzweigte, ( endlich- ) abelsche Erweiterungen von K.

2) Für nicht-endliche algebraische Zahlkörper wurden ähnliche Ergebnisse wie Satz 15 und die beiden Corollare ( in allgemeinerer Form ) von Y. Kawada ([9]) ermittelt.

## § 9 Beispiele

In diesem Paragraphen werden die Nullklassengruppen spezieller Funktionenkörper mit endlichen und absolut algebraischen Konstantenkörpern bestimmt.

Es sei k der Primkörper der Charakteristik 3; es sei k(x) der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten x mit Koeffizienten aus k. Es sei K der Zerfällungskörper des Polynoms

$$f = X^2 - x(x-1)(x-2) \qquad (\in k(x)[X])$$

über k(x).

K ist eine abelsche Erweiterung vom Grade 2 von k(x), die für 4 Bewertungen von k(x) verzweigt ist: für die Gradbewertung und für die zu den irreduziblen Polynomen x, x-1, x-2 gehörenden Bewertungen. Nach Satz 5 gilt dann für den 2-Rang der Nullklassengruppe von K:

$$2\text{-Rang}(\overline{D_0(K)}) \geq 4 - 2 = 2$$

Insbesondere ist 4 ein Teiler der Klassenzahl h(K) von K. K hat das Geschlecht g = 1; nach Lemma 3.8. besteht dann die Ungleichung:

$$\begin{aligned} h(K) &= (|k|^{\frac{1}{2}} + 1)^{2g} \\ &= (\sqrt{3} + 1)^2 \\ &< 8 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich insgesamt:

9.1. Die Klassenzahl von K ist 4; die Nullklassengruppe von K ist direkte Summe zweier Gruppen der Ordnung 2.

Als nächstes werden die Klassenzahlen der Konstantenerweiterungen $K_n$ vom Grade n von K bestimmt. Hierzu wird ein Hilfssatz aus der Theorie der Zetafunktion

verwendet ([6], 318-320 ):

Ist M ein AF1 mit endlichem Konstantenkörper m vom Geschlecht g, so hat die Klassenzahl die Form:

$$h(M) = \prod_{i=1}^{2g}(1 - w_i)$$

Hierbei sind die $w_i$ komplexe Zahlen, die sich aus den Nullstellen der Zetafunktion von M ergeben. Jedes $w_i$ hat den Betrag $|w_i| = |m|^{\frac{1}{2}}$; außerdem gilt bei geeigneter Numerierung: $w_i w_{i+g} = |m|$ , $i = 1,..,g$

Die Klassenzahl der Konstantenerweiterung vom Grade n von M hat die Form: $\prod_{i=1}^{2g}(1 - w_i^n)$

Für K lassen sich jetzt die $w_i$ ( i = 1,2 ) berechnen. Aus

$$(1 - w_1)(1 - w_2) = 4 \qquad (= h(K))$$

und

$$w_1 w_2 = 3 \qquad (= |k|)$$

ergibt sich:

$$w_1 = -w_2 \ , \ w_1^2 = -3$$

Hieraus folgt für die Klassenzahl von $K_n$:

9.2. $$h(K_n) = \begin{cases} 3^n + 1 \ , \text{ falls n ungerade ist} \\ (3^{n/2} - (-1)^{n/2})^2 \ , \text{ falls n gerade ist} \end{cases}$$

Um die Struktur der Nullklassengruppe von $K_n$ zu bestimmen, wird zunächst die Nullklassengruppe $\overline{D_o(L)}$ von L = Kl, wobei l die algebraische Hülle von k bezeichnet, untersucht. Es ergibt sich folgende Strukturaussage:

9.3. $$\overline{D_o(L)} \cong l^* \times l^* \quad ; L = Kl \text{ , l algebraische Hülle von k}$$

Beweis:

a) Da l abzählbar ist, existiert eine Kette von endlichen Teilkörpern $l_n$ ( n = 0,1,.. ) von l mit den Eigenschaften: $l_o = k$; $l_n$ ist eine Erweiterung von Primzahlgrad von $l_{n-1}$

( $n > 0$ ), und $\bigcup_n l_n = l$.

L ist die Vereinigung der Körper $L_n = Kl_n$ : $L = \bigcup_n L_n$

Die Nullklassengruppe $\overline{D_o(L)}$ ist dann die Vereinigung der $\overline{D_o(L_n)}$:

$$\overline{D_o(L)} = \bigcup_n \overline{D_o(L_n)}$$

b) Für alle n ist die Klassenzahl $h(L_n)$ nicht durch 3 teilbar ( 9.2. ); daher ist die 3-Sylowgruppe von $\overline{D_o(L)}$ trivial. Von nun an bezeichne p eine von 3 verschiedene Primzahl.

Für $n \geq n_o$ ist der Grad von $L_n$ über K durch 4 teilbar; die Klassenzahl von $L_n$ hat dann die Form:

$$h(L_n) = (3^{[L_n : K]/2} - 1)^2$$

Für $n \geq n(p)$ ( $\geq n_o$ ) ist der Grad $[L_n : K]$ auch durch $2(p-1)$ teilbar; dann ist $h(L_n)$ durch p teilbar:

Da p ( $\neq 3$ ) nach dem Fermatschen Satz $3^{p-1} - 1$ teilt, teilt p auch

$$3^{r(p-1)} - 1 = (3^{p-1} - 1)(3^{(r-1)(p-1)} + .. + 1)$$

Für $n \geq n(p)$ ist daher die p-Sylowgruppe von $\overline{D_o(L_n)}$ nicht trivial. Bei jeder Konstantenerweiterung vom Grade p vergrößert sich diese Gruppe ( Satz 6 ). Da l die algebraische Hülle von k ist, existieren unendlich viele n mit der Eigenschaft, daß $[L_n : L_{n-1}] = [l_n : l_{n-1}]$ gleich p ist. Daher ist für $p \neq 3$ die p-Sylowgruppe von $\overline{D_o(L_n)}$ nicht endlich.

c) Für $n \geq n'(p)$ ( $\geq n_o$ ) ist $h(L_n)$ durch $p^4$ teilbar. Es sei jetzt: $n \geq n'(p)$, $[L_{n+1} : L_n] = p$, $[L_n : K] = 2s$ ( $[L_n : K]$ ist für $n \geq n_o$ durch 4 teilbar )

Dann gilt:

$$h(L_{n+1})/h(L_n) = (3^{p \cdot s} - 1)^2/(3^s - 1)^2$$

$$= (\sum_{i=0}^{p-1} 3^{s\,i})^2 \qquad =$$

$$= (\sum_{i=0}^{p-1}(3^{s\,i} - 1) + p)^2$$
$$= (\sum_{i=0}^{p-1}(3^s - 1)\sum_{j=0}^{i-1} 3^{s\cdot j} + p)^2$$
$$= (\sqrt{h(L_n)}\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{i-1} 3^{s\cdot j} + p)^2$$

$h(L_n)$ ist durch $p^4$ teilbar; dann ist $\sqrt{h(L_n)}\sum\sum 3^{s\cdot j}$ durch $p^2$ teilbar; $h(L_{n+1})/h(L_n)$ ist also durch $p^2$, jedoch nicht durch $p^3$ teilbar. Es gilt für die p-Klassenzahlen:

$$h_p(L_{n+1}) = p^2 \cdot h_p(L_n) \quad ; \; [L_{n+1} : L_n] = p, \; n \geq n'(p)$$

Der p-Rang von $\overline{D_o(L_n)}$ ist dann nach Satz 7 kleiner oder gleich 2 ( $h_p(L_{n+1}) \geq p^r \, h_p(L_n)$ , r = p-Rang($\overline{D_o(L_n)}$) ). Da die p-Klassenzahl für $n \geq n'(p)$ bei Konstantenerweiterungen vom Grade p um den Faktor $p^2$ zunimmt, ist nach Lemma 6.2. der p-Rang von $\overline{D_o(L)}$ ungleich 1.
Für $p \neq 3$ hat $\overline{D_o(L)}$ den p-Rang 2. Da $\Omega$ die algebraische Hülle von k ist, ist der Exponent von p im Grad von L über K nicht endlich. Nach Satz 11 gilt dann:

$$\overline{D_o(L)}_p \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$$
$$( \; (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p \text{ p-Sylowgruppe von } \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \; )$$

d) Insgesamt ergibt sich jetzt für die Nullklassengruppe von L:

$$\overline{D_o(L)} = \prod_p{}^{\circ} \overline{D_o(L)}_p$$
$$\cong \prod_{p\neq 3}{}^{\circ}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p)$$
$$\cong \prod_{p\neq 3}{}^{\circ}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p \times \prod_{p\neq 3}{}^{\circ}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$$

Da $\prod_{p\neq 3}{}^{\circ}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$ zu $1^*$ isomorph ist, folgt hieraus die Behauptung.

Bemerkung: 9.3. stimmt weitgehend mit klassischen Ergebnissen überein:
Ist M ein AF1 vom Geschlecht g, dessen Konstantenkörper der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist, so hat die Null-

klassengruppe die Form:

$$\overline{D_o(M)} \cong \prod_{2\nmid} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

Der Torsionsbestandteil $D_o'$ dieser Gruppe ist zu $\prod_{2\nmid} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ isomorph; $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist zur Gruppe E der Einheitswurzeln von $\mathbb{C}$ isomorph. Es gilt daher:

$$D_o' \cong \prod_{2\nmid} (E \times E)$$

Zum Abschluß werden noch Folgerungen aus 9.3. gezogen. Es sei L' eine algebraische Konstantenerweiterung von K; es sei $\prod_p p^{n(p)}$ der Grad von L' über K.

9.4. Ist n(p) endlich, so ist auch die Gruppe $\overline{D_o(L')}_p$ endlich.

Ist n(p) nicht endlich, so ist $\overline{D_o(L')}_p$ zu einer der folgenden Gruppen isomorph:

$$\{1\};\ (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p;\ (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$$

Beweis: $\overline{D_o(L')}_p$ ist eine Untergruppe von $\overline{D_o(L)}_p$. Nach 9.3. ist dann der p-Rang r(p) von $\overline{D_o(L')}_p$ höchstens gleich 2. Ist n(p) endlich, so ist $\overline{D_o(L')}_p$ nach Satz 11 direkte Summe von endlichen Gruppen, in diesem Falle also selbst endlich. Ist n(p) nicht endlich, so ist $\overline{D_o(L')}_p$ nach Satz 11 zu $\prod_{r(p)} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p$ isomorph.

Die 2-Sylowgruppe von $\overline{D_o(L')}$ läßt sich genau bestimmen:

9.5. $$\overline{D_o(L')}_2 \cong \mathbb{Z}/2^{n(2)+1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n(2)+1}\mathbb{Z} \quad , n(2) < \infty$$

$$\overline{D_o(L')}_2 = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_2 \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_2 \quad , n(2) = \infty$$

Beweis:

$\overline{D_o(K)}_2$ besitzt nach 9.1. den 2-Rang 2; $\overline{D_o(L')}_2$ hat dann ebenfalls den 2-Rang 2. Für $n(2) = \infty$ ergibt sich die Behauptung wie bei 9.4. aus Satz 11.

Es sei n(2) jetzt endlich. Die Konstantenerweiterung vom Grade $2^{n(2)}$ von K liegt in L'; K' bezeichne diesen Körper.

Es sei K'' eine endliche Konstantenerweiterung von K', die in L' liegt. Der Grad $[K'' : K']$ und 2 sind teilerfremd. Nach Lemma 5.1. ist $\overline{D_o(K')}_2$ dann ein direkter Faktor von $\overline{D_o(K'')}_2$. Da diese Gruppen denselben 2-Rang haben, stimmen sie überein. Die Nullklassengruppe von L' ist Vereinigung von Nullklassengruppen endlicher Erweiterungen von K. Es gilt daher:

$$\overline{D_o(L')}_2 = \overline{D_o(K')}_2$$

Es genügt also, die Behauptung für K' an Stelle von L' zu beweisen. Dies erfolgt durch vollständige Induktion nach $n = n(2)$.

Für $n = 0$, d.h. $K' = K$, gilt nach 9.1.:

$$\overline{D_o(K')}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Um den Induktionsschritt durchführen zu können, wird zunächst noch der Fall $n = 1$ ( $[K' : K] = 2$ ) bewiesen. Nach 9.2. hat K' die Klassenzahl:

$$h(K') = (3 - (-1))^2 = 16$$

Da $\overline{D_o(K)}_2$ und $\overline{D_o(K')}_2$ denselben 2-Rang besitzen, gilt nach Lemma 6.2. für die Elemente $b_1, b_2$ jeder Basis von $\overline{D_o(K')}_2$:

$$|b_1| \geq 4 \; ; \quad |b_2| \geq 4$$

Hieraus folgt:

$$\overline{D_o(K')}_2 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

Es seien K'' die Konstantenerweiterung vom Grade $2^n$ und K' die Konstantenerweiterung vom Grade $2^{n+1}$ von K ( $n \geq 1$ ). Für K'' sei die Behauptung richtig; bilden $a_1$ und $a_2$ eine Basis von $\overline{D_o(K'')}_2$, so besitzen beide Elemente die Ordnung $2^{n+1}$. Da $\overline{D_o(K')}_2$ und $\overline{D_o(K'')}_2$ denselben 2-Rang besitzen, gilt jetzt nach Lemma 6.2. für jede Basis $b_1, b_2$ von $\overline{D_o(K')}_2$: $|b_1| = |b_2| = 2^{n+2}$

**Hieraus folgt:**

$$\overline{D_0(K')}_2 \cong \mathbb{Z}/2^{n+2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n+2}\mathbb{Z}$$

Bemerkung: Mit ähnlichen Überlegungen lassen sich in vielen Fällen auch für andere Primzahlen p die p-Sylowgruppen der Nullklassengruppe von $L'$ bestimmen.

## Literaturverzeichnis

[1] E. ARTIN, J. TATE, Class field theory. Harvard 1961

[2] N. BOURBAKI, Eléments de mathématiques. Livre II: Algèbre, chap. 4: Corps commutatifs. 2. Aufl., Paris 1959

[3] N. BOURBAKI, Eléments de mathématiques. Livre III: Topologie générale, chap. 3: Groupes topologiques. 3. Aufl., Paris 1960

[4] A. BROUMER, M. ROSEN, Class number and ramification in number fields. Nagoya Math. J. 23, 97-102 (1963)

[5] C. CHEVALLEY, Algebraic functions of one variable. New York 1951

[6] M. EICHLER, Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen. Basel 1963

[7] H. HASSE, Zahlentheorie. 2. Aufl., Berlin 1963

[8] E. HEWITT, K. ROSS, Abstract harmonic analysis I, Berlin 1963

[9] Y. KAWADA, On the class field theory of algebraic number fields with infinite degree. J. Math. Soc. of Japan 3, 104-115 (1951)

[10] E. LAMPRECHT, Existenz von Zahlkörpern mit nicht abbrechendem Klassenkörperturm. Archiv Math. 18, 140-152 (1967)

[11] M. L. MADAN, Class number and ramification in fields of algebraic functions. Archiv Math. (demnächst)

[12] S. MAC LANE, Homology. Berlin 1963

[13] M. MORIYA, Abelsche Erweiterungen über algebraischen Funktionenkörpern in einer Unbestimmten mit absolut algebraischem Konstantenkörper. J. reine angew. Math. 179, 143-147 (1938)

[14] J. NEUKIRCH, Klassenkörpertheorie. Bonn 1967

[15] L. PONTRJAGIN, Topological groups. Princeton 1946

[16] J.-P. SERRE, Corps locaux. Paris 1962

[17] J.-P. SERRE, Cohomologie galoisienne. 3. Aufl., Berlin 1965

[18] U. TIEMEIER, Das Klassenkörperturmproblem bei Funktionenkörpern. Saarbrücken 1966 (Diplomarbeit)

[19] E. WEISS, Algebraic number theory. New York 1963

## Lebenslauf

Am 6.2.1944 wurde ich, Udo Tiemeier, als Sohn des Gutsinspektors Hermann Tiemeier und seiner Ehefrau Herta, geb. Feldmann, in Ostichau, Kreis Thorn, geboren. Seit 1946 wohne ich in Ensheim ( Saar ).

Hier und in St. Ingbert besuchte ich die Grundschule von 1950 bis 1954. Danach besuchte ich das Staatliche Realgymnasium St. Ingbert, an dem ich im Frühjahr 1963 die Reifeprüfung ablegte.

Im Mai 1963 begann ich mit dem Studium der Mathematik und der Physik an der Universität Saarbrücken. Ich besuchte Vorlesungen, Übungen und Seminare
in Mathematik von J. André, J. Dörr, G. Hotz, H. Kupisch, E. Lamprecht, D. Puppe, H. Söhngen;
in Physik von G. Eckart, C. v. Fragstein, A. Maue, G. Schulz.

Im Frühjahr 1965 legte ich die Diplom-Vorprüfung in Mathematik ab. Im Juli 1966 erwarb ich das Diplom in Mathematik.

Saarbrücken, im Januar 1968

Udo Tiemeier

**Auf ROTAPRINT gedruckt durch:**
**Deutsche Studentische Selbsthilfe, 66 Saarbrücken 15, Universität p.**
**Büro: DSS, 66 Saarbrücken 3, Kaiserstr. 17 (Studentenhaus), Tel. 2 11 44**

Auf ROTAPRINT gedruckt durch:
Deutsche Studentische Selbsthilfe, 66 Saarbrücken 15, Universität p.
Büro: DSS, 66 Saarbrücken 3, Kaiserstr. 17 (Studentenhaus), Tel. 2 11 44